

Uniwersytet Mikołaja Kopernika  
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej  
Centrum Astronomiczne

Piotr Tadeusz Różański  
nr albumu: 217724

Praca magisterska  
na kierunku astronomia

Modelowanie pozasłonecznych  
układów planetarnych  
na podstawie  
astrometrii mikrosekundowej

Opiekun pracy dyplomowej  
dr hab. Krzysztof Goździewski, prof. UMK  
Centrum Astronomiczne UMK

Toruń 2011

Pracę przyjmuję i akceptuję

Potwierdzam złożenie pracy dyplomowej

.....

*data i podpis opiekuna pracy*

.....

*data i podpis pracownika dziekanatu*

*Uniwersytet Mikołaja Kopernika zastrzega sobie prawo własności niniejszej pracy  
magisterskiej w celu udostępniania dla potrzeb działalności naukowo-badawczej lub  
dydaktycznej.*

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>5</b>
1.1	Skale czasu . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Modelowanie dynamiki układu</b>	<b>8</b>
2.1	Modelowanie keplerowskie . . . . .	8
2.1.1	Elementy orbitalne . . . . .	9
2.1.2	Modelowanie na podstawie elementów . . . . .	11
2.1.3	Modelowanie metodą Stumpffa . . . . .	13
2.2	Modelowanie N-ciał . . . . .	14
2.2.1	Metoda Rungego-Kutty . . . . .	14
2.3	Modelowanie ruchu gwiazdy . . . . .	14
2.3.1	Układy współrzędnych . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Modelowanie obserwacji</b>	<b>18</b>
3.1	Ruch barycentrum układu . . . . .	18
3.2	Paralaksa . . . . .	19
3.3	Grawitacyjne ugięcie światła . . . . .	21
3.3.1	Efekt Shapiro . . . . .	23
3.4	Aberracja światła . . . . .	23
3.5	Modelowanie obserwacji astrometrycznych . . . . .	24
3.5.1	Pomiary względne . . . . .	24
3.6	Modelowanie prędkości radialnych . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Optymalizacja modelu</b>	<b>26</b>
4.1	Funkcja wiarygodności . . . . .	26
4.1.1	Obserwacje o rozkładzie normalnym . . . . .	27
4.1.2	Obserwacje o innych rozkładach . . . . .	27
4.2	Optymalizacja . . . . .	28
4.2.1	Algorytm Nelder-Meada . . . . .	28

4.2.2	Algorytm Levenberga-Marquadta . . . . .	28
4.3	Wyznaczenie niepewności parametrów . . . . .	29
4.3.1	Metoda Monte Carlo . . . . .	29
4.3.2	Metoda bootstrap . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Analiza istniejących obserwacji</b>	<b>31</b>
5.1	Gliese 849 . . . . .	31
5.1.1	Modelowanie . . . . .	31
5.1.2	Optymalizacja . . . . .	32
5.2	HD 12661 . . . . .	33
5.2.1	Modelowanie . . . . .	33
5.2.2	Optymalizacja . . . . .	34
5.3	HR 8799 . . . . .	36
5.3.1	Model orbit kołowych $i = 180^\circ$ . . . . .	36
5.3.2	Płaski model orbit kołowych . . . . .	38
5.3.3	Symulacja numeryczna rozwiązań . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Dokumentacja pakietu Planetar</b>	<b>42</b>
6.1	Wprowadzenie . . . . .	42
6.1.1	Wymagania programowe . . . . .	42
6.2	Instalacja . . . . .	42
6.2.1	Korzystanie z efemeryd NASA . . . . .	43
6.2.2	Uruchamianie . . . . .	43
6.3	Składnia plików zadań . . . . .	44
6.3.1	Sekcja <i>główna</i> . . . . .	46
6.3.2	Sekcja <i>task</i> . . . . .	46
6.3.3	Sekcja <i>star</i> . . . . .	46
6.3.4	Sekcja <i>planet</i> . . . . .	47
6.3.5	Sekcja <i>param</i> . . . . .	48
6.3.6	Sekcja <i>mini</i> . . . . .	49
6.3.7	Sekcja <i>simulator</i> . . . . .	50
6.4	Symulacja układu planetarnego . . . . .	50
6.4.1	Zadanie <i>simulate</i> . . . . .	50
6.4.2	Zadanie <i>model</i> . . . . .	51
6.5	Optymalizacja parametrów . . . . .	51
<b>7</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>53</b>

# Rozdział 1

## Wstęp

Astrometria jako technika poszukiwania planet pozasłonecznych wyłoniła się z analizy gwiazdowych układów podwójnych, do której była wielokrotnie — i z powodzeniem — stosowana. Niestety, dotychczasowe próby odkrycia planet na podstawie obserwacji astrometrycznych, choć liczne w ostatnich latach, nie przyniosły jak dotąd spodziewanego rezultatu.

Nadzieję na znaczny postęp w tej dziedzinie wiąże się powszechnie z misją *Gaia* Europejskiej Agencji Kosmicznej, której start planowany jest obecnie na rok 2013. Projekt ma na celu uzyskanie precyzyjnych obserwacji astrometrycznych (o dokładności na poziomie  $20 \mu\text{as}$ ), spektrofotometrycznych oraz pomiarów prędkości radialnych dla około miliarda gwiazd do 20 wielkości gwiazdowej.

Innym, wartym uwagi projektem astrometrycznym jest przygotowywany w Centrum Astronomii UMK projekt *RISARD*, oparty o radiowe obserwacje interferometryczne. Celem projektu jest poszukiwanie planet orbitujących wokół aktywnych radiowo czerwonych karłów. Przewiduje się, że dokładność pomiarów astrometrycznych wyniesie  $100\text{--}300 \mu\text{as}$ , co z uwagi na niewielką masę docelowych gwiazd powinno umożliwić detekcję planet o masach rzędu masy Jowisza.

Analiza tak precyzyjnych obserwacji wymaga uwzględnienia wielu efektów pomijanych w tradycyjnym modelowaniu astrometrycznym. Dokładnym, a jednocześnie efektywnym (obliczeniowo) sposobem uwzględnienia tych efektów jest wektorowe modelowanie układu planetarnego zgodne ze Szczególną Teorią Względności, wraz z poprawkami wynikającymi z OTW. Tak skonstruowany model może zostać wykorzystany do analizy zarówno pomiarów astrometrycznych, jak i spektroskopowych.

Opracowany model zaimplementowany został w postaci programu komputerowego *Planetar*, umożliwiającego modelowanie układów planetarnych na podstawie precyzyjnej astrometrii, pomiarów prędkości radialnych i/lub bezpośredniego obrazowania planet. Pełną dokumentację programu wraz z instrukcją użytkowania zawiera ostatna część niniejszej pracy.

## 1.1 Skale czasu

Wraz z rozwojem precyzji astronomicznych technik pomiarowych, wzrastała konieczność pomiaru czasu z coraz większą dokładnością. Aby było to możliwe, należało precyzyjnie zdefiniować sposób pomiaru czasu i układ odniesienia, w którym mierzona wartość będzie zdefiniowana. Obecnie, istnieje kilkanaście astronomicznych skal czasu, wśród których wyróżnić można kilka głównych grup.

**Universal Time (UT)** Skale czasu *uniwersalnego* związane są z obrotowym ruchem Ziemi w taki sposób, aby jedna doba odpowiadała w przybliżeniu odstępowi czasu pomiędzy kolejnymi górowaniami Słońca. Spośród skal czasu z tej grupy najbardziej rozpowszechnioną jest skala czasu UTC (uniwersalny czas koordynowany), będąca czasem wzorcowym, ustalonym na podstawie TAI (skali czasu atomowego).

Synchronizacja czasu UTC z nieregularnościami obrotu Ziemi uzyskiwana jest poprzez okresowe wprowadzanie tzw. *sekundy przestępnej*. Powoduje to, że skala czasu UTC nie jest liniowa, nie jest więc wygodną skalą czasu do prowadzenia obserwacji astronomicznych.

**Terrestrial Time (TT)** *Czas ziemski* jest skalą czasu ustalaną (podobnie jak UTC) na podstawie skali czasu atomowego. Jednakże, w przeciwieństwie do UTC, TT jest skalą liniową, o dobrze zdefiniowanym układzie odniesienia w ramach Ogólnej Teorii Względności. Skala czasu TT jest (w przybliżeniu) czasem własnym mierzonym przez hipotetyczny zegar umieszczony na geoidzie na wysokości poziomu morza. Początek skali został dobrany w taki sposób, aby stanowiła naturalną kontynuację niegdyś stosowanego czasu *efemeryd* (ET):

$$TT = UTC + 42.184 \text{ s} + \text{liczba sekund przestępnych UTC} \quad (1.1)$$

**Barycentre Dynamical Time (TDB)** Blisko powiązaną z TT skalą czasu jest *czas dynamiczny barycentrum*, określony (w przybliżeniu) jako czas własny mierzony w barycentrum Układu Słonecznego. Skala czasu TDB jest zgodna ze skalą czasu współczesnych efemeryd publikowanych przez NASA. Jednakże, ponieważ rozbieżność pomiędzy TDB a TT nigdy nie przekracza 0.002 s, dla praktycznych zastosowań można wykorzystywać skalę czasu TT jako parametr efemeryd.

**Coordinate Time (TCG, TCB)** Opisane powyżej skale czasu określone zostały w układach odniesienia znajdujących się wewnątrz potencjału grawitacyjnego, opóźniającego (w niejednorodny sposób) wskazywany przez nie upływ czasu. Skale TCG

i TCB zostały powołane z uwagi na konieczność zdefiniowania skali czasu wolnej od wpływu pola grawitacyjnego, nadającej się do wykorzystania jako niezależna zmienna w równaniach Ogólnej Teorii Względności stosowanych do precyzyjnych obliczeń mechaniki Układu Słonecznego.

Z uwagi na powyższe, czas mierzony według TCG i TCB płynie „szybciej” niż czas według skal TT i TDB. Ważną konsekwencją tego faktu są inne wartości numeryczne fundamentalnych stałych fizycznych, które należy przyjąć, prowadząc obliczenia w oparciu o te skale czasu. Biorąc to pod uwagę, dla potrzeb niniejszego modelu rezygnacja ze skali czasu TT na rzecz skal TCG lub TCB wiązałaby się z dodatkową komplikacją, nie wnosząc w zamian żadnej wymiernej korzyści.

# Rozdział 2

## Modelowanie dynamiki układu

Modelowanie ruchu poszczególnych planet układu leży u podstaw modelowania i analizy wszelkich obserwacji układów planetarnych, zarówno astrometrycznych jak i spektroskopowych. Istotą zagadnienia jest wyznaczenie położenia i prędkości wszystkich planet układu w dowolnej chwili czasu na podstawie zadanych (na określoną epokę) warunków początkowych.

Układ planetarny zawierający  $N$  planet możemy traktować jako układ  $N + 1$  punktów materialnych, poruszających się zgodnie z zasadami mechaniki. Funkcja Hamiltona dla tak określonego układu ma postać (Beaugé et al., 2007)

$$\mathcal{H} = \sum_{i=0}^N \frac{\vec{p}_{bi}^2}{2m_i} - G \sum_{i=0}^N \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_{bi} - \vec{r}_{bj}|}, \quad (2.1)$$

gdzie  $m_i$  oznacza masy,  $\vec{r}_{bi}$  położenia, zaś  $\vec{p}_{bi}$  pędy poszczególnych ciał, zdefiniowane względem barycentrum układu.

### 2.1 Modelowanie keplerowskie

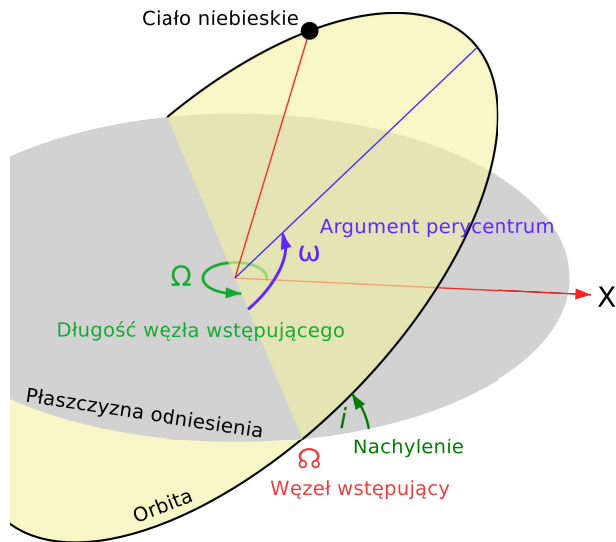
W ogólności, równania ruchu generowane przez hamiltonian w zdefiniowanej powyżej postaci posiadają ściśle, analityczne rozwiązania jedynie dla  $N = 1$ . Metodą otrzymania przybliżonego rozwiązania dla  $N > 1$  jest zapisanie funkcji Hamiltona w postaci

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \quad (2.2)$$

gdzie  $\mathcal{H}_0$ , poprzez przejście do innych zmiennych  $\vec{r}_i$ ,  $\vec{p}_i$ ,  $\beta_i$  (zdefiniowanych już tylko dla planet) oraz wprowadzenie dla każdej planety parametru grawitacyjnego  $\mu_i$ , da się zapisać jako

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\vec{p}_i^2}{2\beta_i} - \sum_{j \neq i} \frac{\mu_i \beta_i}{|\vec{r}_i|} \right). \quad (2.3)$$





Rysunek 2.1: Schematyczne przedstawienie kątów Eulera wchodzących w skład elementów orbitalnych.

(Lukas Snyder, Wikimedia Commons)

Jeżeli następnie zaniedbamy część  $\mathcal{H}_1$ , równania ruchu generowane przez hamiltonian będzie można rozwiązać analitycznie, a modelowanie przeprowadzić dla każdej planety niezależnie. Zagadnienie takie ma wtedy ścisłe rozwiązanie: każda z planet poruszać się będzie po krzywej stożkowej w ustalonym układzie współrzędnych.

Jakość otrzymanego przybliżenia zależy w dużym stopniu od definicji układu współrzędnych, w którym zdefiniowane są wektory  $\vec{r}_i$  i  $\vec{p}_i$  (rozdział 2.3.1).

### 2.1.1 Elementy orbitalne

Zestaw parametrów, w pełni wyznaczających keplerowską orbitę ciała niebieskiego, określa się mianem *elementów orbitalnych*. Do wyznaczenia kształtu orbity wymagane są dwa parametry, kolejne trzy określają jej orientację względem ustalonego układu współrzędnych, zaś ostatni z sześciu wyznacza położenie ciała na orbicie w ustalonej chwili czasu.

Zależy od konwencji, jakie dokładnie parametry uznajemy za wchodzące w skład zestawu elementów orbitalnych. Jedną ze standardowych kombinacji parametrów to:

- pól wielka  $a \neq 0$
- mimośród  $e \geq 0$
- nachylenie  $i \in [0; \pi]$
- długość węzła wstępującego  $\Omega \in [0; 2\pi)$
- argument perycentrum  $\omega \in [0; 2\pi)$
- anomalia średnia  $M \in [0; 2\pi)$

Powyższy zestaw elementów orbitalnych jest właściwy, jeżeli ograniczymy się jedynie do orbit eliptycznych. Takie ograniczenie wydaje się uzasadnione w kontekście modelowania istniejących układów planetarnych. Jednakże, w trakcie poszukiwania rozwiązań optymalnych, jako rozwiązania pośrednie mogą pojawić się także orbity nieskończone: paraboliczne i hiperboliczne.

Dla orbit nieskończonych nie jest określony okres orbitalny ( $P$ ), nie jest więc też określona anomalia średnia. W zamian za to, można określić czas ( $\delta t_p$ ) względem ostatniego przejścia przez perycentrum. Parametr ten będzie dobrze zdefiniowany dla każdego typu orbity (o ile dobrze określone jest perycentrum, o czym później). Dla orbit zamkniętych można łatwo odzyskać wartość anomalii średniej

$$M = 2\pi \frac{\delta t_p}{P} = \delta t_p \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \quad (2.4)$$

Ponadto, dla orbit parabolicznych, powyższy zestaw parametrów nie jest wystarczający do pełnego określenia orbity, bowiem dla takich orbit nie jest określona półoś wielka, a mimośród zawsze wynosi 1. Wobec tego, w miejsce mimośrodu wprowadzić należy parametr orbity  $p$ . Parametr ten jest określony i nieujemny dla każdego typu orbity (włączając trajektorie radialne, dla których  $p = 0$ ). Na podstawie parametru  $p$  można wyznaczyć mimośród

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}. \quad (2.5)$$

Otrzymany zestaw elementów orbitalnych przedstawia się następująco:

- półoś wielka  $a \neq 0$
- parametr  $p \geq 0$
- nachylenie  $i \in [0; \pi]$
- długość węzła wstępującego  $\Omega \in [0; 2\pi)$
- argument perycentrum  $\omega \in [0; 2\pi)$
- różnica czasu perycentrum  $\delta t_p$

W celu określenia parametrów  $\Omega$ ,  $\omega$  i  $\delta t_p$  dla wszystkich rodzajów orbit, należy dodatkowo ustalić:

1. Jeżeli  $e = 0$ , czyli dla orbit kołowych,  $\omega = 0$ . Czas  $\delta t_p$  mierzony jest wtedy względem położenia węzła wstępującego.

2. Jeżeli  $i = 0$ , czyli dla orbit płaskich,  $\Omega = 0$ . Węzeł wstępujący leży wtedy na osi X układu współrzędnych.

Warto zauważyć, że półos wielka  $a$  jest dodatnia tylko dla orbit zamkniętych, zaś dla orbit hiperbolicznych ma wartość ujemną. Dla orbit parabolicznych element ten nie jest określony, więc dla takich orbit przyjąć należy  $a = +\infty$ .

## 2.1.2 Modelowanie na podstawie elementów

W celu modelowania położenia ciała na orbicie, warto wprowadzić pośredni, orbitalny układ współrzędnych, w którym płaszczyzna XY będzie płaszczyzną ruchu ciała, zaś oś X skierowana będzie ku perycentrum orbity (z uwzględnieniem uwag w rozdziale 2.1.1). Położenie i prędkość w tym układzie współrzędnych, oznaczymy jako  $\vec{r}_{orb}$  i  $\vec{v}_{orb}$ . Metoda wyznaczenia wektorów w orbitalnym układzie współrzędnych zależy będzie od typu modelowanej orbity.

**Orbita eliptyczna**  $a \in (0, +\infty)$

Obliczenia rozpocząć należy od wyznaczenia anomalii średniej

$$M = \delta t_p \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \pmod{2\pi}. \quad (2.6)$$

Anomalię ekscentryczną ( $E$ ) wyznaczyć można, rozwiązując numerycznie równanie Keplera

$$M = E - e \sin E, \quad (2.7)$$

przy pomocy metody Newtona-Raphsona:

$$\begin{aligned} E^{(0)} &= M \\ E^{(n+1)} &= \frac{E^{(n)} - e \sin E^{(n)} - M}{1 - e \cos E^{(n)}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Korzystając z rozwinięcia  $\sin E \approx E$  wydawać by się mogło, że lepszym początkowym przybliżeniem będzie  $E^{(0)} = \frac{M}{1-e}$ , lecz przy takim warunku początkowym nie zawsze osiągnięta jest zbieżność metody numerycznej.

Po wyznaczeniu półosi małej elipsy  $b = a\sqrt{1-e^2} = \sqrt{ap}$ , można wyznaczyć wektory położenia i prędkości w orbitalnym układzie współrzędnych:

$$\vec{r}_{orb} = \begin{pmatrix} a(\cos E - e) \\ b \sin E \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{orb} = \frac{\sqrt{\mu a^{-3}}}{1 - e \cos E} \begin{pmatrix} -a \sin E \\ b \cos E \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

### Orbita hiperboliczna $a < 0$

W tym przypadku postępowanie jest analogiczne. Hiperboliczna anomalia średnia ma postać

$$M = \delta t_p \sqrt{\frac{\mu}{|a|^3}}. \quad (2.10)$$

Równanie Keplera dla orbit hiperbolicznych przyjmuje postać

$$M = e \sinh E - E, \quad (2.11)$$

i podobnie jak poprzednio, można rozwiązać je przy pomocy metody Newtona. Jednakże, zapisanie układu równań w postaci

$$\begin{aligned} E^{(0)} &= M \\ E^{(n+1)} &= \frac{e \sinh E^{(n)} - E^{(n)} - M}{e \cosh E^{(n)} - 1}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

spowoduje, że metoda numeryczna nie będzie zbieżna dla dużych  $e$ .

Aby zagwarantować zbieżność metody Newtona, należy (Gooding and Odell, 1988) dokonać zamiany zmiennych  $\sinh E \rightarrow S$  z warunkiem początkowym  $S = \frac{M}{e}$ . Układ przybierze wtedy postać

$$\begin{aligned} S^{(0)} &= \frac{M}{e} \\ S^{(n+1)} &= \frac{e S^{(n)} - \operatorname{arsinh} S^{(n)} - M}{e - [1 + (S^{(n)})^2]^{-\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Analogicznie do przypadku eliptycznego można wyznaczyć wartość  $b = |a|\sqrt{e^2 - 1}$ , która tym razem nie ma jednak geometrycznej interpretacji. Orbitalne wektory położenia i prędkości przyjmą następującą postać:

$$\vec{r}_{orb} = \begin{pmatrix} a(\cosh E - e) \\ b \sinh E \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{orb} = \frac{\sqrt{\mu|a|^{-3}}}{e \cosh E - 1} \begin{pmatrix} a \sinh E \\ b \cosh E \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

### Orbita paraboliczna $a = +\infty$

W celu znalezienia parabolicznej anomalii ekscentrycznej ( $D$ ), rozwiązać należy równanie Barkera:

$$M = pD + \frac{1}{3}D^3, \quad (2.15)$$

gdzie  $M = \delta t_p \sqrt{\mu}$ .

Szczęśliwie, równanie to posiada zawsze trzy rozwiązania analityczne, z czego jedno jest rozwiązaniem rzeczywistym:

$$D = \sqrt[3]{\sqrt{9M^2 + p^3} + 3M} - \frac{p}{\sqrt[3]{\sqrt{9M^2 + p^3} + 3M}}. \quad (2.16)$$

Na podstawie wyznaczonej wartości  $D$  można obliczyć współrzędne wektorów położenia i prędkości:

$$\vec{r}_{orb} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(p - D^2) \\ D\sqrt{p} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{orb} = \frac{2\sqrt{\mu}}{p + D^2} \begin{pmatrix} -D \\ \sqrt{p} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

### Podsumowanie

W każdym z powyższych przypadków, poszukiwane wektory  $\vec{r}$  i  $\vec{v}$  w wyjściowym układzie współrzędnych wyznaczyć możemy przy pomocy macierzy obrotów o kąty Eulera, wchodzące w skład elementów orbitalnych:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= R_z(-\Omega) \cdot R_x(-i) \cdot R_z(-\omega) \cdot \vec{r}_{orb}, \\ \vec{v} &= R_z(-\Omega) \cdot R_x(-i) \cdot R_z(-\omega) \cdot \vec{v}_{orb}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

### 2.1.3 Modelowanie metodą Stumpffa

Modelowanie keplerowskie planety może zostać przeprowadzone w alternatywny sposób, bez wprowadzania definicji elementów orbitalnych. Metoda opracowana przez K. Stumpffa, pozwala na modelowanie orbity bezpośrednio na podstawie wektorów stanu (położenia i prędkości), bez rozróżniania typów orbit.

Rzetelne opracowanie metody stanowi publikacja Stumpff (1988). W dużym skrócie, metoda ta zastępuje równania Keplera i Barkera tzw. równaniem głównym, niezależnym od typu orbity, również rozwiązywanym numerycznie:

$$z + c_2\eta z^2 + c_3\zeta z^3 = 1, \quad (2.19)$$

gdzie  $c_2, c_3$  nie są stałymi, lecz określonymi, nieliniowymi funkcjami niewiadomej  $z$ . Należy przy tym zwrócić szczególną uwagę na odpowiedni dobór początkowej wartości  $z$ .

Metoda Stumpffa jest praktycznym rozwiązaniem szczególnie wtedy, gdy parametryzacja planet przeprowadzana jest w oparciu o wektory stanu. Zbliżoną metodę, wprowadzającą pojęcie *macierzy przejścia* dla wektorów stanu, opracował Shepperd (1985).

## 2.2 Modelowanie N-ciał

Jeżeli oddziaływania pomiędzy poszczególnymi planetami układu, wyrażone składnikiem  $\mathcal{H}_1$  hamiltonianu, nie mogą zostać zaniedbane, równania ruchu 3 lub więcej ciał<sup>1</sup> nie posiadają analitycznego rozwiązania. Stosowaną w tej sytuacji metodą odtworzenia trajektorii obiektów wchodzących w skład układu jest symulacja numeryczna oparta na równaniach ruchu.

### 2.2.1 Metoda Rungego-Kutty

Jednym z prostszych, a jednocześnie efektywnych metod numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych jest metoda Rungego-Kutty 4. rzędu. Przy ustalonej długości kroku czasowego  $\delta t$  oraz zadanim początkowym stanie układu  $\mathbf{w}_0$ , algorytm wyznacza rozwiązanie równania różniczkowego

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{f}(\mathbf{w}) \quad (2.20)$$

w postaci stanów układu odpowiadających kolejnym krokom czasowym.

Metoda Rungego-Kutty polega na następującym schemacie numerycznym:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{(0)} &\leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{w}_0) \\ \mathbf{k}^{(1)} &\leftarrow \mathbf{f}\left(\mathbf{w}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{k}^{(0)}\delta t\right) \\ \mathbf{k}^{(2)} &\leftarrow \mathbf{f}\left(\mathbf{w}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{k}^{(1)}\delta t\right) \\ \mathbf{k}^{(3)} &\leftarrow \mathbf{f}\left(\mathbf{w}_0 + \mathbf{k}^{(2)}\delta t\right) \\ \mathbf{w} &\leftarrow \mathbf{w}_0 + \frac{1}{6}(\mathbf{k}^{(0)} + 2\mathbf{k}^{(1)} + 2\mathbf{k}^{(2)} + \mathbf{k}^{(3)})\delta t. \end{aligned} \quad (2.21)$$

W przypadku zastosowania tej metody do symulacji układu  $N$  ciał,  $\mathbf{w} \equiv (\vec{r}_1, \vec{v}_1 \dots \vec{r}_N, \vec{v}_N)$ , zaś

$$\mathbf{f}(\mathbf{w}) = \mathbf{f}(\vec{r}_1, \vec{v}_1 \dots \vec{r}_N, \vec{v}_N) = (\vec{v}_1, f_1(\vec{r}_1) \dots \vec{v}_N, f_N(\vec{r}_N)), \quad (2.22)$$

gdzie  $f_i(\vec{r}_i)$  wyraża przyspieszenie działające na ciało o numerze  $i$  na skutek grawitacyjnego oddziaływania pozostałych.

## 2.3 Modelowanie ruchu gwiazdy

Mając zadane wektory stanu wszystkich planet w żądanej chwili czasu, możemy wyznaczyć, korzystając z podstawowych zasad zachowania, położenie i prędkość

---

<sup>1</sup>za wyjątkiem ograniczonego problemu 3 ciał

gwiazdy względem barycentrum układu planetarnego. Postać wykorzystanej zależności będzie od tego, w jakim układzie współrzędnych zdefiniowane zostały wektory stanu planet.

### 2.3.1 Układy współrzędnych

Jak już wspomniano, dokładność przybliżenia wynikającego z keplerowskiego modelowania ruchu planet, zależy w dużym stopniu od konstrukcji układu współrzędnych wykorzystanego do przedstawienia funkcji Hamiltona w postaci (2.2). Dla odpowiednio skonstruowanych układów współrzędnych (układy Poincaré i Jacobiego), składnik  $\mathcal{H}_1$  można traktować jako małe zaburzenie. Rząd wielkości poprawki  $\mathcal{H}_1$  w stosunku do energii niezaburzonej  $\mathcal{H}_0$  oszacować wtedy można jako wielkość mas planet w stosunku do masy gwiazdy centralnej. Dla pozostałych układów współrzędnych nie można zapostulować takiego założenia.

Warto zauważyć, że podobnie jak wektory stanu, również i elementy orbitalne mogą być zdefiniowane w każdym z tych układów współrzędnych, a metody wzajemnej konwersji zdefiniowane w poprzednich rozdziałach mogą zostać zastosowane niezależnie od przyjętego układu.

W poniższym zestawieniu, wektory stanu planet ( $i = 1 \dots N$ ) w każdym z układów współrzędnych oznaczane będą przez  $\vec{r}_i$  i  $\vec{v}_i$ , masy planet przez  $m_i$ , masa gwiazdy przez  $m_\star$ , zaś barycentryczne wektory stanu gwiazdy przez  $\vec{r}_\star$  i  $\vec{v}_\star$ .

#### Układ współrzędnych barycentrycznych

*Barycentrycznym* nazywamy taki układ współrzędnych, w którym zarówno położenia, jak i prędkości zdefiniowane są względem barycentrum układu planetarnego. Układ taki jest naturalnym układem dla numerycznych symulacji ruchu planet, jest bowiem układem inercyjnym (pod warunkiem, że układ planetarny możemy uznać za izolowany).

Znając wektory stanu dla poszczególnych planet, położenie i prędkość gwiazdy możemy uzyskać z podstawowych zasad zachowania. Z definicji środka masy dla układu gwiazdy i  $N$  planet mamy

$$m_\star \vec{r}_\star + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{bi} = 0, \quad (2.23)$$

co po przekształceniu daje

$$\vec{r}_\star = -\frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{bi}}{m_\star}. \quad (2.24)$$

Tymczasem, z zasady zachowania pędu dla tego samego układu otrzymujemy analogicznie

$$\vec{v}_\star = -\frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{bi}}{m_\star}. \quad (2.25)$$

Przyspieszenie  $f_i(\vec{r}_i)$  działające na poszczególne ciała w barycentrycznym układzie współrzędnych wyraża się jako

$$f_i(\vec{r}_{bi}) = \frac{Gm_\star}{|\vec{r}_\star - \vec{r}_{bi}|^3}(\vec{r}_\star - \vec{r}_{bi}) + \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_{bj} - \vec{r}_{bi}|^3}(\vec{r}_{bj} - \vec{r}_{bi}). \quad (2.26)$$

Wartość parametru grawitacyjnego dla konwersji z wektorów stanu do oskulacyjnych elementów orbitalnych wynosi

$$\mu = \frac{Gm_\star}{\left(1 + \frac{m}{m_\star}\right)^2}. \quad (2.27)$$

### Astrocentryczny układ współrzędnych

Układ, w którym zarówno położenia jak i prędkości planet zdefiniowane są względem położenia i prędkości gwiazdy centralnej, określa się mianem *astrocentrycznego* układu współrzędnych. Definiując

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= \vec{r}_{bi} - \vec{r}_\star \\ \vec{v}_i &= \vec{v}_{bi} - \vec{v}_\star, \end{aligned} \quad (2.28)$$

otrzymamy ponownie z zasad zachowania

$$\begin{aligned} \vec{r}_\star &= -\frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{m_\star + \sum_{i=1}^N m_i} \\ \vec{v}_\star &= -\frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{m_\star + \sum_{i=1}^N m_i}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

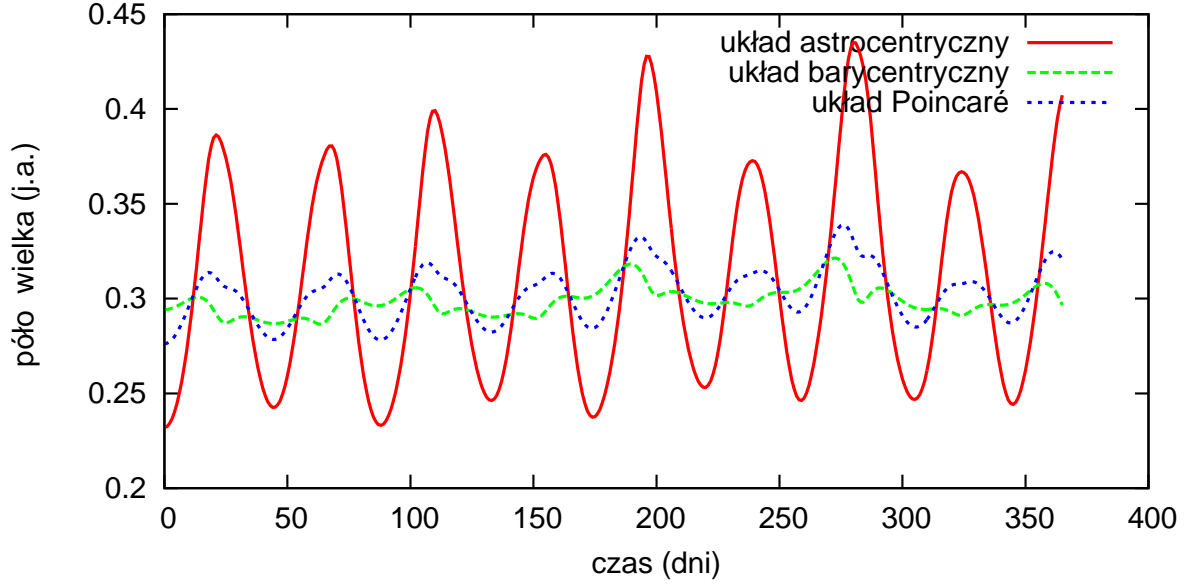
Wartość parametru grawitacyjnego dla konwersji z wektorów stanu do oskulacyjnych elementów orbitalnych wynosi tutaj

$$\mu = G(m_\star + m). \quad (2.30)$$

### Układ współrzędnych Poincaré

Pracom Henri Poincaré (1897) zawdzięczamy kanoniczny układ współrzędnych, określany do dziś nazwiskiem odkrywcy. W układzie, o którym mowa, współrzędne planet są tożsame ze współrzędnymi astrocentrycznymi, zaś pędy (nie zaś wprost:





Rysunek 2.2: W ramach testowania poprawności metody Rungego-Kutty (rozdział 2.2.1) oraz formuł z rozdziału 2.3.1, odtworzono przy pomocy symulacji numerycznej wykres elementów oskulacyjnych testowego układu planetarnego (1.8b) z Beaugé et al. (2007).

prędkości) zdefiniowane są względem barycentrum. Masę planet określa parametr  $\beta$ , zdefiniowany jako

$$\beta_i = \frac{m_\star m_i}{m_\star + m_i}. \quad (2.31)$$

Biorąc powyższe pod uwagę, można na podstawie zasad zachowania otrzymać następującą zależność:

$$\begin{aligned} \vec{r}_\star &= -\frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{m_\star + \sum_{i=1}^N m_i} \\ \vec{v}_\star &= -\sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{v}_i}{m_\star + m_i}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

W układzie współrzędnych Poincaré parametr  $\mu$  ma taką samą postać, jak w układzie astrocentrycznym, czyli

$$\mu_i = G(m_\star + m_i). \quad (2.33)$$

# Rozdział 3

## Modelowanie obserwacji

Istotnym krokiem na drodze do analizy obserwacji astronomicznych układów planetarnych (niezależnie od typu obserwacji) jest modelowanie obserwacji syntetycznych, uwzględniających wszystkie efekty wpływające na obserwacje faktyczne.

Modelowanie obserwacji wymaga przejścia z układu odniesienia związanego z barycentrum modelowanego układu do układu odniesienia obserwatora. Wiąże się to z koniecznością uwzględnienia rozmaitych efektów:

- paralaksy heliocentrycznej,
- aberracji światła,
- efektu Rømera,
- grawitacyjnego ugięcia światła.

Z uwagi na wymaganą wysoką precyzję obliczeń, dogodnym sposobem uwzględnienia powyższych efektów jest prowadzenie obliczeń w formalizmie wektorowym, bez uciekania się do niepotrzebnych przybliżeń.

### 3.1 Ruch barycentrum układu

Tradycyjnie, parametrami definiującymi położenie i ruch gwiazdy są: paralaksa heliocentryczna lub odległość, ruch własny w dwóch wymiarach oraz prędkość radialna. W przypadku prowadzenia obliczeń o wysokiej dokładności, wszystkie te parametry nie mogą one określać ruchu gwiazdy (który nie jest prostoliniowy), lecz jedynie ruch barycentrum modelowanego układu. Co więcej, parametry kątowe (paralaksa, położenie kątowe i ruch własny) mogą być zdefiniowane tylko w określonej epoce, ponieważ będą zmieniać się w wyniku ruchu przestrzennego barycentrum. Należy zdefiniować zatem:

- odległość początkową barycentrum  $D_0 = \frac{1}{\pi_0}$ ,
- początkowe położenie na płaszczyźnie stycznej  $x_0$  i  $y_0$ ,
- ruch własny  $\mu_\alpha$  i  $\mu_\delta$ ,
- początkową prędkość radialną  $v_r$ .

Punktem wyjściowym dla modelowania obserwacji są wektory stanu  $\vec{r}_b$  i  $\vec{v}_b$  zdefiniowane w układzie odniesienia barycentrum modelowanego układu. Zgodnie z ogólnie przyjętą konwencją, osie układu orientuje się w taki sposób, aby oś Z układu współrzędnych była skierowana w kierunku barycentrum Układu Słonecznego (SSB). Wtedy, jeśli początek układu współrzędnych umieszczony zostanie na sferze niebieskiej, osie X i Y leżą na płaszczyźnie stycznej i można zorientować je w taki sposób, aby kierunek osi X odpowiadał wzrastającej współrzędnej rektascensji, zaś kierunek osi Y — deklinacji. Można wtedy zapisać wektory stanu  $\vec{R}$  i  $\vec{V}$  obserwowanego obiektu w układzie odniesienia SSB:

$$\begin{aligned}\vec{R}(t) &= \begin{pmatrix} [x_0 + (t - t_0)] D_0 \mu_\alpha \\ [y_0 + (t - t_0)] D_0 \mu_\delta \\ D_0 + (t - t_0) v_r \end{pmatrix} + \vec{r}_b(t), \\ \vec{V}(t) &= \begin{pmatrix} D_0 \mu_\alpha \\ D_0 \mu_\delta \\ v_r \end{pmatrix} + \vec{v}_b(t).\end{aligned}\tag{3.1}$$

## 3.2 Paralaksa

Definiując problem paralaksy heliocentrycznej w formalizmie wektorowym, możemy jednocześnie uwzględnić wpływ efektu Rømera, czyli opóźnienia sygnału wynikającego ze skończonej prędkości światła. Należy przy tym uwzględnić opóźnienie wynikające zarówno z przemieszczenia obserwatora względem barycentrum Układu Słonecznego (SSB), jak i z przemieszczenia obserwowanego obiektu względem tamtejszego barycentrum.

Oznaczmy barycentryczne położenie obserwatora przez  $\vec{r}_o$ . Wszystkie obliczenia prowadzone będą względem SSB, należy jednak wyróżnić trzy rodzaje położenia obserwowanego obiektu.

**Położenie geometryczne**  $\vec{R}_g(t)$  jest położeniem, jakie w chwili równoczesnej czasowi obserwacji zajmuje obserwowany obiekt. Pojęcie to jest pojęciem niepraktycznym

w zastosowaniu, z uwagi na znaczną odległość obiektu od obserwatora i wynikające stąd duże opóźnienie sygnału świetlnego.

**Położenie wiekowe**  $\vec{R}(t)$  jest położeniem obiektu opóźnionym o czas równoważny przemierzeniu przez sygnał świetlny odległości  $D_0$ . Pojęcie to należy utożsamiać z modelowanym stanem układu planetarnego w chwili  $t$ :

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_g(t - \frac{D_0}{c}). \quad (3.2)$$

**Położenie astrometryczne**  $\vec{R}_a(t)$  jest położeniem obserwowanym przez obserwatora nieruchomego względem SSB, ale umieszczonego w położeniu  $\vec{r}_o$ , przy zaniedbaniu wpływu potencjału grawitacyjnego:

$$\vec{R}_a(t) = \vec{R}_g(t - \frac{|\vec{R}_a(t) - \vec{r}_o|}{c}). \quad (3.3)$$

Podstawiając (3.2) do (3.3), można wyeliminować z równań położenie geometryczne obiektu. Otrzymujemy wtedy

$$\begin{aligned} \vec{R}_a(t) &= \vec{R}(t - \Delta t) \\ \Delta t &= \frac{1}{c} (|\vec{R}_a(t) - \vec{r}_o| - D_0). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Przemieszczenie się obserwowanego ciała w czasie  $\Delta t$  jest niewielkie, możemy więc przybliżyć jego ruch prostoliniowym. Można wtedy wyznaczyć położenie  $\vec{R}_a$  bez iteracyjnego rozwiązywania równań ruchu:

$$\vec{R}_a = \vec{R} - \vec{V}\Delta t, \quad (3.5)$$

przy czym równanie na  $\Delta t$  jest równoważne

$$|\vec{R} - \vec{V}\Delta t - \vec{r}_o| = c\Delta t + D_0. \quad (3.6)$$

Równanie powyższe może zostać rozwiązane analitycznie. Wprowadźmy oznaczenie  $\vec{D} = \vec{R} - \vec{r}_o$ . Równanie można wtedy zapisać jako

$$|\vec{D} - \vec{V}\Delta t|^2 = (c\Delta t + D_0)^2, \quad (3.7)$$

co po rozwinięciu sprowadza się do równania kwadratowego na  $\Delta t$ :

$$(c^2 - \vec{V}^2)\Delta t^2 + 2(D_0c + \vec{D} \cdot \vec{V})\Delta t - (\vec{D}^2 - D_0^2) = 0. \quad (3.8)$$

Równanie posiada dwa rozwiązania, z czego interesuje nas jedno:

$$\Delta t = \frac{\sqrt{(D_0c + \vec{D} \cdot \vec{V})^2 + (\vec{D}^2 - D_0^2)(c^2 - \vec{V}^2)} - (D_0c + \vec{D} \cdot \vec{V})}{c^2 - \vec{V}^2}. \quad (3.9)$$

Otrzymana formuła pozwala na jednoczesne uwzględnienie wszystkich efektów przestrzennego przemieszczenia gwiazdy względem obserwatora. W praktycznej implementacji (vide *Planetar*), poszczególne wyrazy jak choćby  $\vec{D} \cdot \vec{V}$ , mogą zostać obliczone krok wcześniej w celu uniknięcia wielokrotnego liczenia tych samych wartości.

### 3.3 Grawitacyjne ugięcie światła

Kontynuując obliczenia w układzie odniesienia SSB, należy wziąć pod uwagę wpływ obecnego w Układzie Słonecznym pola grawitacyjnego. Każde ze źródeł pola grawitacyjnego powoduje zakrzywienie otaczającej je czasoprzestrzeni, które objawia się pozornym ugięciem promieni świetlnych przebiegających nieopodal.

Do przeprowadzenia pełnej analizy tego efektu wymagane jest rozwiązanie (zazwyczaj numeryczne) równań Ogólnej Teorii Względności w celu uzyskania przebiegu geodezyjnych. Jednakże, przy zakładanej dokładności astrometrycznej równej  $1 \mu\text{as}$ , można (Klioner, 2003) dla odpowiednio dużych (tabela 3.1) odległości kątowych od zaburzającego obiektu, skorzystać z przybliżenia ciał Układu Słonecznego jako sferycznie symetrycznych. Wtedy, efekt ugięcia promienia świetlnego przez ciało o masie  $M_A$ , znajdujące się w odległości  $\rho$  od obserwatora, na odległości kątowej  $\psi$ , wynosi

$$\delta_A = \frac{(1 + \gamma_{PPN}) GM_A}{c^2 \rho} \text{ctg} \frac{\psi}{2}, \quad (3.10)$$

przy czym  $\gamma_{PPN} \approx 1$  jest stałą zdefiniowaną w ramach parametryzowanego formalizmu post-Newtonowskiego (PPN) w Will (1971).

Położenia ciał Układu Słonecznego powinny zostać uzyskane na podstawie efermeryd. Jednakże, z uwagi na aberrację planetarną, obserwowane (astrometryczne) położenie ciała  $\vec{r}$  w chwili  $t$  będzie różne od położenia geometrycznego  $\vec{r}_E$ . Wielkości te, wraz z  $\rho$ , wiąże relacja

$$\begin{aligned} \rho &= |\vec{r}(t) - \vec{r}_o| \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}_E(t - \frac{\rho}{c}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

która powinna zostać rozwiązana iteracyjnie. Można wtedy wyznaczyć odległość kątową

$$\psi = \arccos \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}_o}{\rho} \cdot \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \right), \quad (3.12)$$

zaś wektorowe przesunięcie na sferze niebieskiej wyniesie

$$\Delta \vec{s}_A = \left[ \frac{1}{\rho} (\vec{r} - \vec{r}_o) \times \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \right] \times \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}. \quad (3.13)$$

nazwa	$\max \delta_A (\mu\text{as})$	$\psi_{\min} (')$
Słońce	$1.75 \cdot 10^6$	53
Merkury	83	—
Wenus	493	—
Mars	116	—
Ceres	1.2	—
Jowisz	16270	2.54 (10.96)
Ganimedes	35	—
Io	31	—
Kallisto	28	—
Europa	19	—
Saturn	5780	0.77 (10.17)
Tytan	32	—
Rea	1.9	—
Japet	1.6	—
Dione	1.2	—
Uran	2080	0.07 (0.78)
Tytania	2.8	—
Oberon	2.4	—
Ariel	1.4	—
Umbriel	1.2	—
Neptun	2533	0.05 (0.29)
Tryton	10	—
Pluton	7	— (0.02)
Charon	1.7	—

Tablica 3.1: Ciała Układu Słonecznego o istotnym wpływie na obserwacje dokonywane z orbity Ziemi przy dokładności  $1 \mu\text{as}$ . Wartość  $\psi_{\min}$  w nawiasie odpowiada sytuacji, gdy księżyce danej planety nie są brane pod uwagę.

Przyjmując, że obserwator znajduje się w pobliżu orbity Ziemi, można oszacować maksymalny efekt ugięcia światła powodowany przez poszczególne ciała Układu Słonecznego. Okazuje się (Klioner, 2003), że przy dokładności  $1 \mu\text{as}$  muszą zostać uwzględnione: Słońce, wszystkie planety Układu Słonecznego wraz z największymi księżycami, Pluton wraz z Charonem oraz planetoida Ceres.

Jeżeli księżyce planet zostaną pominięte, musi to zostać wzięte pod uwagę przy określaniu minimalnej odległości kątowej  $\psi_{\min}$ . Powinna ona wtedy spełniać dla każdego księżyca  $K$

$$\psi_{\min} > \alpha_K + \psi_{K,1\mu\text{as}}, \quad (3.14)$$

gdzie  $\alpha_K$  jest maksymalną kątową separacją księżyca od środka tarczy planety.

Obliczone wartości  $\Delta\vec{s}_A$  dla wszystkich obiektów powinny być zachowane w celu uwzględnienia ich w końcowym etapie modelowania.

### 3.3.1 Efekt Shapiro

Obecność pola grawitacyjnego powoduje nie tylko odchylenie, ale także opóźnienie sygnałów świetlnych. Efekt ten został przewidziany po raz pierwszy przez Irwina I. Shapiro (1964) i jest odtąd powiązany z jego nazwiskiem.

Jak się jednak okazuje (Klioner, 2003), w przypadku pól grawitacyjnych wewnątrz Układu Słonecznego, opóźnienie Shapiro nie przekracza  $0.001 \text{ s}$ , nie musi być zatem brane pod uwagę.

## 3.4 Aberracja światła

Ostatnim z efektów, który należy wziąć pod uwagę, aby sprowadzić obserwacje do układu odniesienia obserwatora, jest aberracja światła. Przypomnijmy, że na etapie redukcji paralaksy (rozdział 3.2) otrzymano wartość  $\vec{R}_a$ , będące położeniem obiektu, które byłoby położeniem obserwowanym, gdyby obserwator spoczywał względem SSB.

Jeżeli obserwator rzeczywiście spoczywa względem SSB, lub jeżeli nie ma potrzeby nadawać aberracji obserwacjom syntetycznym (ponieważ faktyczne obserwacje zostały już pozbawione wpływu aberracji), należy ominąć niniejszy krok i przejść do następnego etapu. W przeciwnym razie, odpowiednie wyrażenia uzyskane zostaną z transformacji Lorentza.

W celu uwzględnienia aberracji światła, należy dokonać transformacji układu współrzędnych o prędkość  $\vec{v}_o$ , będącą barycentryczną prędkością obserwatora. Rów-

nania transformacji Lorentza przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma_o t + \frac{\gamma_o}{c^2} (\vec{v}_o \cdot \vec{r}) \\ \vec{r}' &= \vec{r} + \left[ \gamma_o t + (\gamma_o - 1) \frac{\vec{v}_o \cdot \vec{r}}{|\vec{v}_o|^2} \right] \vec{v}_o, \end{aligned} \quad (3.15)$$

przy czym  $\gamma_o = (1 - |\vec{v}_o|^2)^{-\frac{1}{2}}$ .

Transformację położenia można otrzymać, podstawiając  $\vec{r} = \vec{R}_a$  i  $t = \frac{1}{c} |\vec{R}_a|$ , co prowadzi do

$$\vec{R}' = \vec{R}_a + \left[ \frac{\gamma_o |\vec{R}_a|}{c} + (\gamma_o - 1) \frac{\vec{v}_o \cdot \vec{R}_a}{|\vec{v}_o|^2} \right] \vec{v}_o. \quad (3.16)$$

Transformację prędkości otrzymać można różniczkując po  $t$  i dzieląc stronami oba równania, podstawiając jednocześnie  $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$ :

$$\vec{V}' = \frac{d\vec{R}'}{dt'} = \frac{\frac{d}{dt} \vec{R}'}{\frac{d}{dt} t'} = \frac{\vec{v}_o + \frac{\vec{V}}{c} + \frac{\gamma_o}{\gamma_o + 1} \frac{\vec{v}_o \cdot \vec{V}}{c^2}}{1 + \frac{\vec{v}_o \cdot \vec{V}}{c^2}}. \quad (3.17)$$

Otrzymane wektory  $\vec{R}'$  i  $\vec{V}'$  stanowią obserwowane położenie i prędkość obiektu w układzie odniesienia obserwatora. Dzięki obliczeniom wektorowym, pod uwagę zostaną wzięte również bardziej subtelne efekty, takie jak poprzeczny efekt Dopplera, które nie byłyby obecne przy tradycyjnym modelowaniu obserwacji.

### 3.5 Modelowanie obserwacji astrometrycznych

Należy rozpocząć od wyznaczenia wektora wodzącego w kierunku obserwowanego obiektu:

$$\vec{s}' = \frac{\vec{R}'}{|\vec{R}'|}. \quad (3.18)$$

Następnie, uwzględnic należy wyliczone uprzednio przesunięcia  $\delta_A$  powodowane przez obecność pól grawitacyjnych:

$$\vec{s} = \vec{s}' + \sum_A \Delta \vec{s}_A. \quad (3.19)$$

Składowe  $x$  i  $y$  wektora  $\vec{s}$  stanowią astrometryczną pozycję obiektu na płaszczyźnie stycznej.

#### 3.5.1 Pomiary względne

Często, szczególnie w przypadku pomiarów otrzymanych techniką interferometryczną, mamy do czynienia z pomiarami względnymi. W takim przypadku, punkt (0,0)



płaszczyzny stycznej nie odpowiada ustalonemu położeniu ICRS, ale dotyczy innego obiektu (np. odległej gwiazdy). Korzyść z tego rodzaju obserwacji polega na obniżeniu wymagań dotyczących precyzji wyznaczenia położenia i prędkości obserwatora (Różański, 2009).

W przypadku modelowania syntetycznych obserwacji względnych, należy wymodelować obserwacje (absolutne) zarówno obiektu badanego, jak i referencyjnego, a następnie, już na płaszczyźnie stycznej, obliczyć różnicę  $\vec{s} - \vec{s}_{\text{ref}}$ .

### 3.6 Modelowanie prędkości radialnych

Wartość prędkości radialnej otrzymać można z definicji, na podstawie wektorów  $\vec{R}'$  i  $\vec{V}'$ :

$$v_{\text{rad}} = \frac{\vec{V}' \cdot \vec{R}'}{|\vec{R}'|} = \vec{V}' \cdot \vec{s}'. \quad (3.20)$$

# Rozdział 4

## Optymalizacja modelu

Zdefiniowany w poprzednich rozdziałach model wektorowy pozwala na generowanie syntetycznych obserwacji astrometrycznych lub prędkości radialnych na podstawie zadanych parametrów układu. Zazwyczaj jednak, parametry te nie są znane *a priori*, zaś zadaniem analizy jest wyznaczenie ich na podstawie obserwacji.

Aby było to możliwe, konieczne jest zdefiniowanie ilościowej oceny zgodności parametrów modelu z obserwacjami. Rolę taką pełnić będzie odpowiednio zdefiniowana *funkcja wiarygodności*, a ocena poszczególnych rozwiązań sprowadzi się do badania wartości przez nią przyjmowanych.

### 4.1 Funkcja wiarygodności

Założmy, że model ma  $N$  nieznanymi parametrów  $k_1 \dots k_N$ , które dla zwięzłości można zapisać jako  $\mathbf{k}$ . Założmy jednocześnie, że dysponujemy  $M$  obserwacjami skalarnymi<sup>1</sup>  $x_i$ . Traktując obserwacje jako zmienne losowe (lub jedną, wielowymiarową zmienną losową  $\mathbf{x}$ ), możemy zdefiniować łączny rozkład prawdopodobieństwa  $p_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$  wektora obserwacji w zależności od ustalonych parametrów  $\mathbf{k}$ . Jeżeli obserwacje są niezależne, rozkład łączny będzie równy iloczynowi rozkładów jednowymiarowych:

$$p_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^M p_{\mathbf{k}}(x_j). \quad (4.1)$$

Pojęciem powiązaniem z rozkładem prawdopodobieństwa jest *funkcja wiarygodności* (ang. likelihood), zwana też prawdopodobieństwem *a posteriori* i zdefiniowana jako

$$L_{\mathbf{x}}(\mathbf{k}) = L(\mathbf{k}|\mathbf{x}) = p_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}). \quad (4.2)$$

---

<sup>1</sup>każda obserwacja astrometryczna stanowi dwie obserwacje skalarne, a pomiar prędkości radialnych — jedną

Poszukiwanie zestawu parametrów  $\mathbf{k}$  najlepiej opisującego model jest równoznaczne poszukiwaniu globalnego maksimum funkcji  $L_x(\mathbf{k})$ . Z przyczyn praktycznych (wartości funkcji mogą być bardzo małe), zwykle maksymalizuje się logarytm tej funkcji — jest to oczywiście równoważne.

#### 4.1.1 Obserwacje o rozkładzie normalnym

Znaczące uproszczenia można poczynić, jeśli przyjmemy, że obserwacje są niezależne i mają rozkład normalny. W takim przypadku funkcja wiarygodności przyjmuje postać

$$L_x(\mathbf{k}) = \prod_{j=1}^M \frac{1}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\tilde{x}_j(\mathbf{k}) - x_j)^2}{2\sigma_j^2}\right), \quad (4.3)$$

gdzie  $\tilde{x}_i(\mathbf{k})$  są syntetycznymi obserwacjami wymodelowanymi na podstawie zestawu parametrów  $\mathbf{k}$ .

Zapiszmy logarytm funkcji wiarygodności:

$$\log L_x(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \frac{(\tilde{x}_j(\mathbf{k}) - x_j)^2}{\sigma_j^2} - \sum_{j=1}^M \log(\sigma_j \sqrt{2\pi}). \quad (4.4)$$

Nietrudno zauważyć, że maksymalizacja powyższej funkcji jest równoważna minimalizacji funkcji  $\chi^2$ , zdefiniowanej jako

$$\chi_x^2(\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^M \frac{(\tilde{x}_j(\mathbf{k}) - x_j)^2}{\sigma_j^2}. \quad (4.5)$$

Jako miarę dopasowania modelu do obserwacji wykorzystuje się często  $\chi_v^2$  (zredukowaną statystykę chi-kwadrat), otrzymywaną przez podzielenie powyższej wartości przez liczbę stopni swobody:

$$\chi_v^2 = \frac{\chi^2}{\nu} = \frac{\chi^2}{M - N}. \quad (4.6)$$

Jak zwraca uwagę Andrae et al. (2010), wprowadzenie powyższej statystyki wymaga szeregu założeń, które zazwyczaj nie są spełnione w analizie precyzyjnych obserwacji astronomicznych (np. założenie liniowości modelu). W związku z tym, wartość statystyki  $\chi_v^2$  może mieć jedynie znaczenie poglądowe i nie powinna być stosowana np. do oceny przedziałów ufności.

#### 4.1.2 Obserwacje o innych rozkładach

Jeżeli jest uzasadnione przypuszczenie, że rozkład błędów obserwacji nie jest rozkładem normalnym, funkcja  $\chi^2$  nie może zostać wykorzystana. W jej miejsce musi zo-

stać wprowadzona odpowiednia postać funkcji wiarygodności. Przykładowo, Baluev (2009) podaje uogólniony model wiarygodności dla obserwacji prędkości radialnych.

## 4.2 Optymalizacja

Minimalizacja funkcji wiarygodności jest szczególnym przypadkiem *zagadnienia optymalizacyjnego*, będącego dobrze znanym problemem matematycznym, polegającym na poszukiwaniu globalnego ekstremum zadanej funkcji celu. Zadanie to realizuje się zwykle w oparciu o algorytmy do lokalnej optymalizacji. Rozpoczynając przeszukiwanie od określonego punktu przestrzeni parametrów, algorytmy te znajdują położenie pobliskiego ekstremum lokalnego. Aby tym sposobem odnaleźć ekstremum globalne, proces ów należy wielokrotnie powtórzyć, za każdym razem wybierając (np. losując) inny punkt startowy.

W ramach projektu *Planetar* udostępnione są dwa algorytmy minimalizacji.

### 4.2.1 Algorytm Nelder-Meada

Algorytm Nelder-Meada (Nelder and Mead, 1965), zwany również algorytmem sympleks<sup>2</sup> jest metodą wyznaczania minimum dowolnej funkcji rzeczywistej wielu zmiennych. Opiera się on o pojęcie  $N$ -wymiarowego sympleksu, czyli zbioru  $N + 1$  punktów z przestrzeni  $N$ -wymiarowej, który ulega ściśle określonym przekształceniom w zależności od wartości, jakie badana funkcja przyjmuje w wierzchołkach sympleksu. Algorytm kończy działanie, kiedy rozmiar sympleksu spadnie poniżej ustalonego poziomu — będzie to znaczyć, że został on sprowadzony do niewielkiego otoczenia szukanego ekstremum.

Wyjątkowym atutem rzeczonyj metody jest brak wymagań dotyczących charakteru funkcji celu, która nie musi być różniczkowalna, ani nawet ciągła. Niestety, ceną za to jest wydajność algorytmu, która ustępuje innym, np. gradientowym algorytmom optymalizacji.

### 4.2.2 Algorytm Levenberga-Marquadta

Algorytm Levenberga-Marquadta jest metodą optymalizacji, której zastosowania ograniczają się do funkcji celu w postaci

$$F(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^M [y_j - f(x_j, \mathbf{p})]^2, \quad (4.7)$$

---

<sup>2</sup>nie mylić z metodą sympleks programowania liniowego

czego szczególnym przypadkiem jest funkcja  $\chi^2$  dla obserwacji o rozkładzie normalnym.

Dzięki tak zdefiniowanej funkcji celu, możliwe jest wykorzystanie macierzy Jacobiego funkcji  $f(x, \mathbf{p})$  w obliczeniach, dzięki czemu zbieżność uzyskiwana jest w stosunkowo niewielkiej liczbie kroków. Jakobian w metodzie LM może być obliczany numerycznie lub można zadać jego analityczną postać — w takim wypadku wydajność algorytmu jest jeszcze większa.

### 4.3 Wyznaczenie niepewności parametrów

Algorytm optymalizacyjny wyszukuje i zwraca położenie ekstremum funkcji celu, odpowiadające zestawowi parametrów najlepiej pasującemu do obserwacji. Można jednak przekonać się, że dowolny zestaw parametrów położony w bliskim otoczeniu ekstremum, będzie niemal równie dobrze pasował do obserwacji. W związku z tym, potrzebny jest sposób na oszacowanie, na ile określone jest położenie minimum otrzymane algorytmem optymalizacyjnym.

Na tą samą sytuację można też spojrzeć z innej nieco strony: parametry modelu zoptymalizowane na podstawie zgodności z obserwacjami, również stanowią pomiar — choć bardzo pośredni — badanego układu planetarnego. W związku z tym, podobnie jak w przypadku każdego pomiaru, należy określić jego niepewność.

W pakiecie *Planetar* dostępne są dwie metody numeryczne szacowania niepewności, które zostaną opisane poniżej. Wyniki przykładowego zastosowania obu metod zawiera tabela 5.1 w rozdziale poświęconym analizie układu planetarnego HD 12661.

#### 4.3.1 Metoda Monte Carlo

Metoda, określana w niniejszej pracy „metodą Monte Carlo”, polega na wielokrotnym znajdowaniu najlepszych dopasowań dla syntetycznych zestawów obserwacyjnych, powstałych przez dodanie do obserwacji faktycznych szumu, modelowanego na podstawie znanych niepewności obserwacji. Optymalizacje prowadzone są lokalnie, zaś za rozwiązania początkowe brany jest zestaw parametrów uzyskany z niezaburzonych danych obserwacyjnych.

Na podstawie uzyskanych zestawów, wyznaczyć można odchylenie standardowe od wartości optymalnej dla poszczególnych parametrów modelu. Otrzymane tym sposobem wartości stanowią miarę niepewności dopasowanych parametrów.

### 4.3.2 Metoda bootstrap

Metoda bootstrap, choć w zasadzie również należy do rodziny metod Monte Carlo i zbudowana jest na podobnej idei co metoda opisana powyżej, różni się od niej sposobem konstrukcji syntetycznych zestawów obserwacyjnych. Przyjmując, że dysponujemy zestawem  $M$  obserwacji, zestawy syntetyczne tworzone będą jako  $M$ -elementowe wariacje z powtórzeniami zbioru obserwacji faktycznych.

Jak widać, niepewności obserwacji nie są w tej metodzie brane pod uwagę. Może to być zaletą metody, jeśli niepewności nie są znane lub też istnieje obawa, że zostały oszacowane nieprawidłowo.

# Rozdział 5

## Analiza istniejących obserwacji

Poprawność zdefiniowanego modelu może zostać zweryfikowana jedynie poprzez analizę faktycznych obserwacji astronomicznych i porównanie otrzymanych wyników z danymi literaturowymi. Przeanalizowano obserwacje kilku układów planetarnych, modelując rozwiązania zaczerpnięte z literatury lub znajdując konfigurację optymalną.

### 5.1 Gliese 849

Pierwszym z układów planetarnych, analizowanych w ramach niniejszej pracy jest układ orbitujący wokół gwiazdy GJ849. Gwiazda ta jest pobliskim (8 pc) karłem typu widmowego M. Na podstawie precyzyjnych obserwacji spektroskopowych gwiazdy, wykryto (Butler et al., 2006) obecność obiegającej ją planety o masie zbliżonej do masy Jowisza.

#### 5.1.1 Modelowanie

Analizę rozpoczęto od wymodelowania syntetycznego przebiegu prędkości radialnych dla podanych w Butler et al. (2006) parametrów:

- $M_{\star} = 0.49 M_{\odot}$
- $\dot{v}_0 = -4.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}/\text{rok}$
- $m \sin i = 0.82 M_{\text{J}}$
- $e = 0.06$
- $P = 1885 \text{ dni}$

- $\omega = 351^\circ$

Dodatkowe dwa parametry, które nie zostały *explicite* podane w publikacji, zostały dopasowane przy zachowaniu stałych wartości pozostałych parametrów:

- $v_0 = 13.12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- $T_p = \text{JD } 2451466$

W tym przypadku (tak jak w przypadku wszystkich planet odkrytych metodą analizy prędkości radialnych) jednoznacznie określony jest jedynie iloczyn  $m \sin i$ . Z tego względu, orbita planety została wymodelowana pod kątem  $i = 90^\circ$ , zaś masa planety została ustalona na  $m = 0.82 M_J$ .

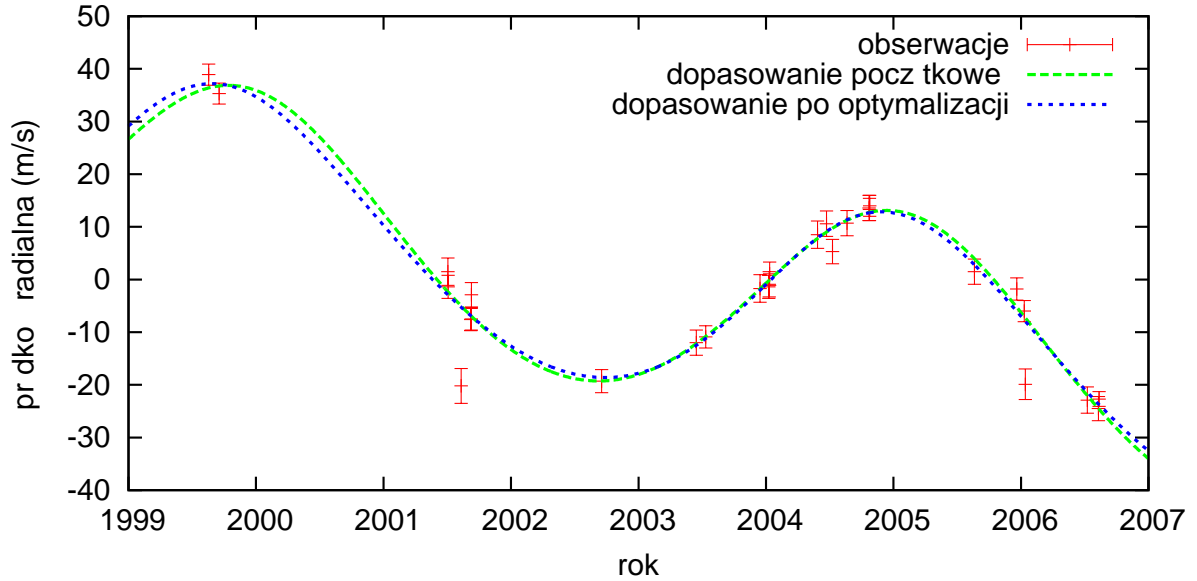
### 5.1.2 Optymalizacja

Przyjmując zdefiniowany powyżej zestaw parametrów jako konfigurację początkową, dokonano lokalnej minimalizacji funkcji  $\chi^2$  przy wysokiej dokładności numerycznej. Podczas minimalizacji, udało się zmniejszyć wartość funkcji  $\chi^2$  z początkowego 2.70 do 2.63. Zoptymalizowana konfiguracja przedstawia się następująco:

- $v_0 = (13.1 \pm 2.8) \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- $\dot{v}_0 = (-4.64 \pm 0.80) \frac{\text{m}}{\text{s}}/\text{rok}$
- $m \sin i = (0.803 \pm 0.045) M_J$
- $e = 0.09 \pm 0.045$
- $P = (1920 \pm 120) \text{ dni}$
- $\omega = (331 \pm 25)^\circ$
- $T_p = \text{JD } 2451328$

Niepewności dopasowanych parametrów uzyskano metodą Monte Carlo przy 100 powtórzeniach. Biorąc pod uwagę niepewności, można ocenić, że konfiguracja zoptymalizowana jest zgodna z konfiguracją podaną w Butler et al. (2006). Powyższa konfiguracja jest jednocześnie najlepszą, jaką udało się znaleźć przy pomocy globalnego przeszukiwania przestrzeni parametrów. Porównanie obu konfiguracji przedstawia rysunek 5.1.





Rysunek 5.1: Konfiguracja Butler et al. (2006) dla układu Gliese 849 ( $\text{rms} = 4.08 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ) oraz konfiguracja zoptymalizowana ( $\text{rms} = 4.02 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ).

## 5.2 HD 12661

Kolejnym analizowanym układem, odkrytym metodą pomiaru prędkości radialnych, jest HD 12661. Gwiazda jest żółtym karłem typu widmowego G6, odległym od Słońca o 121 lat świetlnych. Pierwsza planeta układu (b) odkryta została w 2001 roku (Fischer et al., 2001), zaś kolejna (c) dwa lata później (Fischer et al., 2003). Studium dynamiczne dla tego układu (Goździewski, 2003; Veras and Ford, 2009) wskazuje na to, że układ obserwowany jest w trakcie krótkiego okresu przejściowego (o ile obserwacje nie są zaburzane przez obecność innych, nieodkrytych jeszcze, planet).

### 5.2.1 Modelowanie

Do analizy wykorzystano obserwacje opublikowane w Fischer et al. (2003). Rozpoczęto od odtworzenia konfiguracji znalezionej w ramach tejże publikacji:

- $M_{\star} = 1.07 M_{\odot}$
- HD 12661b:
  - $m_b \sin i_b = 2.30 M_J$
  - $e_b = 0.35$
  - $P_b = 263.6$  dni

Tablica 5.1: Porównanie niepewności parametrów modelu wyznaczonych metodą Monte Carlo i metodą bootstrap

	$m \sin i$	$P$ (dni)	$e$	$\omega$ ( $^\circ$ )
HD 12661b	2.319	263.62	0.351	293.6
$\pm$ (Monte Carlo)	0.027	0.34	0.010	2.3
$\pm$ (bootstrap)	0.048	0.60	0.016	3.9
HD 12661c	1.684	1505	0.112	172.9
$\pm$ (Monte Carlo)	0.065	69	0.059	26.6
$\pm$ (bootstrap)	0.089	68	0.069	27.3

- $\omega_b = 293.1^\circ$
- $T_{pb} = JD\ 2449941.9$

- HD 12661c:

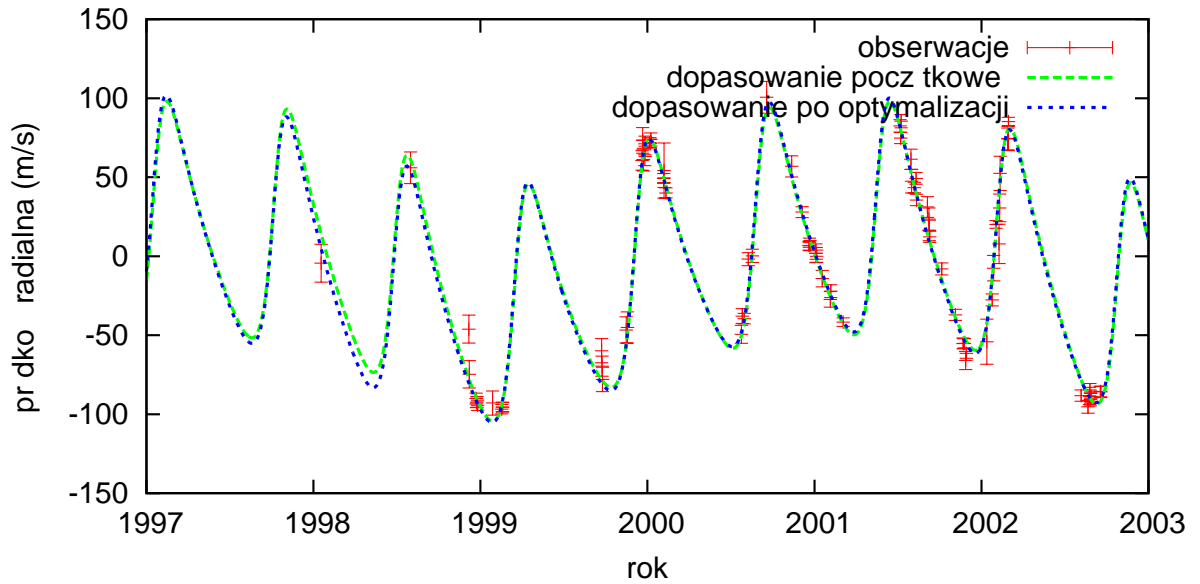
- $m_c \sin i_c = 1.57 M_J$
- $e_c = 0.20$
- $P_c = 1444.5$  dni
- $\omega_c = 162.4^\circ$
- $T_{pc} = JD\ 2449733.6$

Na podstawie danych obserwacyjnych dopasowano składową stałą prędkości radialnej  $v_0 = -7.95 \frac{m}{s}$ .

## 5.2.2 Optymalizacja

Wychodząc od przedstawionej powyżej konfiguracji, dokonano optymalizacji rozwiązania poprzez lokalną minimalizację funkcji  $\chi^2$  względem wszystkich parametrów układu. W ramach optymalizacji, udało się nieznacznie zmniejszyć wartość funkcji  $\chi^2$  z 2.52 do 2.34, jednocześnie zmniejszając błąd średniokwadratowy (rms) z początkowego  $8.59 \frac{m}{s}$  na  $8.48 \frac{m}{s}$ . Porównanie konfiguracji zoptymalizowanej z początkową przedstawia rysunek 5.2.

Niepewności wyznaczonych parametrów uzyskane zostały zarówno metodą Monte Carlo, jak i metodą bootstrap (w obu przypadkach wykonano 1000 iteracji) — wyniki przedstawia tabela 5.1. Zasluguje na uwagę to, że niepewności wyznaczone dwoma



Rysunek 5.2: Konfiguracja Fischer et al. (2003) dla układu HD 12661 oraz konfiguracja zoptymalizowana.

jakże różnymi metodami, dają zbliżone wyniki. Otrzymane niepewności są z grubsza zgodne z niepewnościami oszacowanymi w Fischer et al. (2003).

Otrzymana konfiguracja, wraz z niepewnościami wyznaczonymi metodą MC, przedstawia się następująco:

- HD 12661b:
  - $m_b \sin i_b = (2.31 \pm 0.03) M_J$
  - $e_b = 0.35 \pm 0.01$
  - $P_b = (263.6 \pm 0.4)$  dni
  - $\omega_b = (293.6 \pm 2.3)^\circ$
  - $T_{pb} = JD\ 2449941.2$
  
- HD 12661c:
  - $m_c \sin i_c = (1.68 \pm 0.07) M_J$
  - $e_c = 0.11 \pm 0.06$
  - $P_c = (1505 \pm 69)$  dni
  - $\omega_c = (173 \pm 27)^\circ$
  - $T_{pc} = JD\ 2449680.0$

## 5.3 HR 8799

Układ planetarny obiegający gwiazdę HR 8799 został odkryty w 2008 roku, kiedy przy pomocy optyki adaptywnej zaobserwowano bezpośrednio (Marois et al., 2009) trzy planety w niewielkiej (rzędu 1") odległości kątowej od gwiazdy. Dwa lata później, dalsze obserwacje (Marois et al., 2010) ujawniły obecność czwartej planety, na najbardziej wewnętrznej orbicie. Poza planetami, w otoczeniu gwiazdy istnieje rozległy dysk pyłowy.

Planety układu są bardzo masywnymi gazowymi olbrzymami, o masach 7–10 mas Jowisza, a więc sięgającymi umownej granicy mas pomiędzy planetami a brązowymi karłami. Z powodu dużych mas planet, silne oddziaływania pomiędzy nimi utrudniają znalezienie stabilnej konfiguracji dla układu (Goździewski and Migaszewski, 2009).

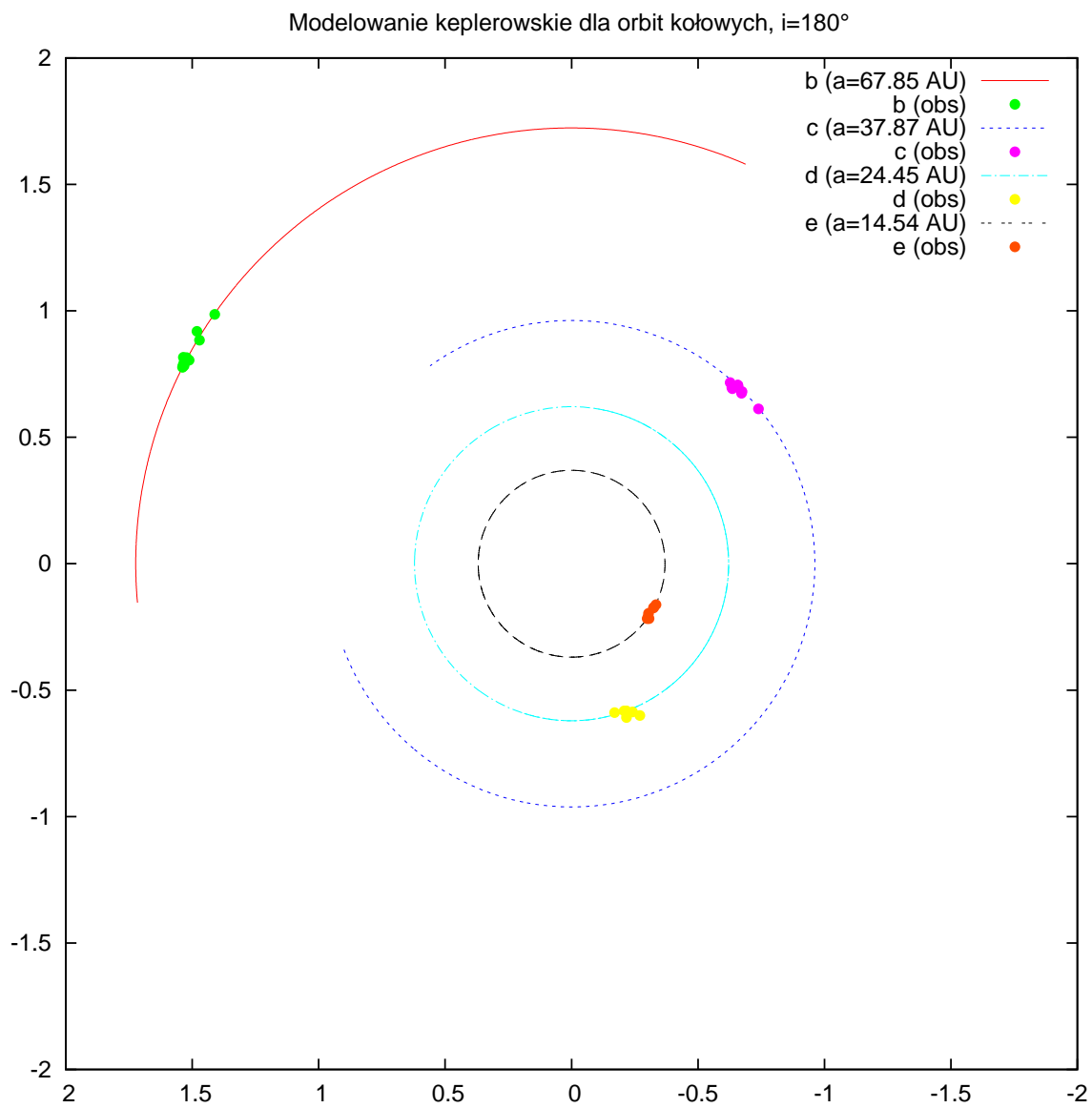
### 5.3.1 Model orbit kołowych $i = 180^\circ$

Analizę rozpoczęto od dopasowania do obserwacji modelu złożonego z orbit kołowych w płaszczyźnie stycznej ( $i = 180^\circ$ ). Dopasowywano więc po dwa parametry (półś wielka, położenie na orbicie) dla każdej z planet. Do analizy przeznaczone zostały obserwacje opublikowane w Bergfors et al. (2011). Parametry modelu znalezione zostały, przeprowadzając wielokrotnie (100 powtórzeń) lokalną optymalizację startującą od losowego punktu w przestrzeni rozwiązań.

Otrzymano następującą konfigurację przy  $\chi^2_v = 0.59$  (podano elementy astrocentryczne), wraz z niepewnościami określonymi metodą Monte Carlo (100 iteracji):

- HR 8799b:  $a = (67.850 \pm 0.062)$  j.a.
- HR 8799c:  $a = (37.87 \pm 0.08)$  j.a.
- HR 8799d:  $a = (24.45 \pm 0.09)$  j.a.
- HR 8799e:  $a = (14.54 \pm 0.23)$  j.a.

Konfiguracja powyższa przedstawiona jest na rysunku 5.3. Bardzo niska wartość statystyki  $\chi^2_v$  wskazuje na to, że niepewności danych obserwacyjnych zostały przeszacowane lub mają rozkład różny od normalnego (np. oszacowanie błędu uwzględnia także błędy systematyczne). Może to również znaczyć, że błędy poszczególnych obserwacji nie są niezależne. Mimo pozornie dobrego dopasowania widać wyraźnie, że orbita planety d nie jest dobrze opisywana przez tę konfigurację.



Rysunek 5.3: Konfiguracja orbit kołowych,  $i = 180^\circ$  dla układu HR 8799

### 5.3.2 Płaski model orbit kołowych

Podobne postępowanie zostało przeprowadzone, zakładając, że orbity planet są kołowe i leżą w tej samej płaszczyźnie (niekoniecznie  $i = 180^\circ$ ). W tym przypadku, do zbioru parametrów dołączono także  $i \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  oraz  $\Omega \in [0, 2\pi]$ , oba parametry wspólne dla wszystkich planet.

Optymalne ( $\chi_v^2 = 0.48$ ) parametry konfiguracji zostały znalezione dla  $i = (159.9 \pm 6.1)^\circ$  oraz  $\Omega = (32 \pm 38)^\circ$ . Wyznaczona w ten sposób płaszczyzna jest zbliżona do rozwiązania znalezionego w Soummer et al. (2011):  $i = 152^\circ$ ,  $\Omega = 35.9^\circ$ . Orbity dla poszczególnych planet przedstawiają się następująco:

- HR 8799b:  $a = (67.9 \pm 2.4)$  j.a.
- HR 8799c:  $a = (40.2 \pm 1.7)$  j.a.
- HR 8799d:  $a = (25.05 \pm 0.55)$  j.a.
- HR 8799e:  $a = (14.54 \pm 0.53)$  j.a.

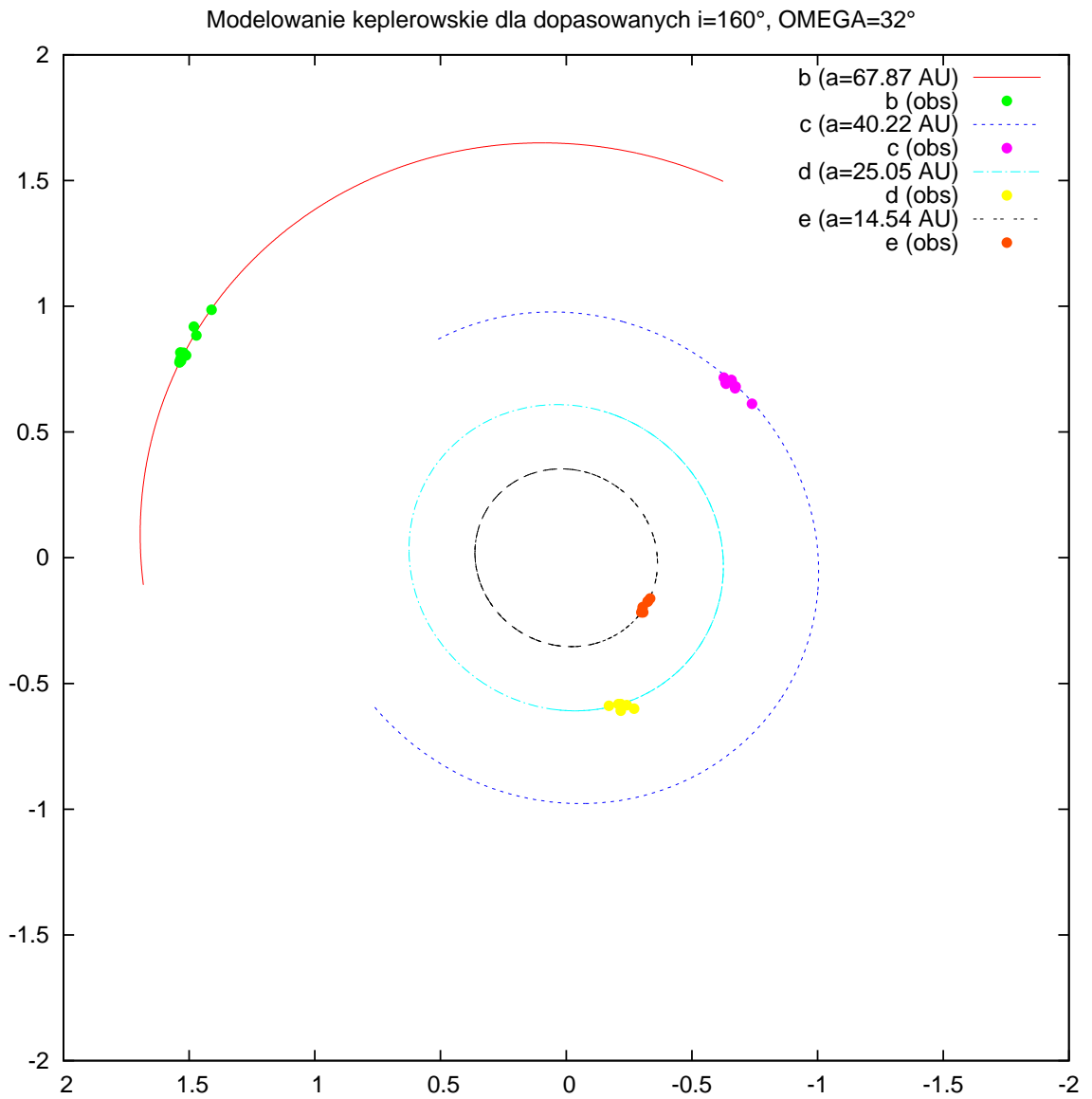
Powyższą konfigurację przedstawia rysunek 5.4.

### 5.3.3 Symulacja numeryczna rozwiązań

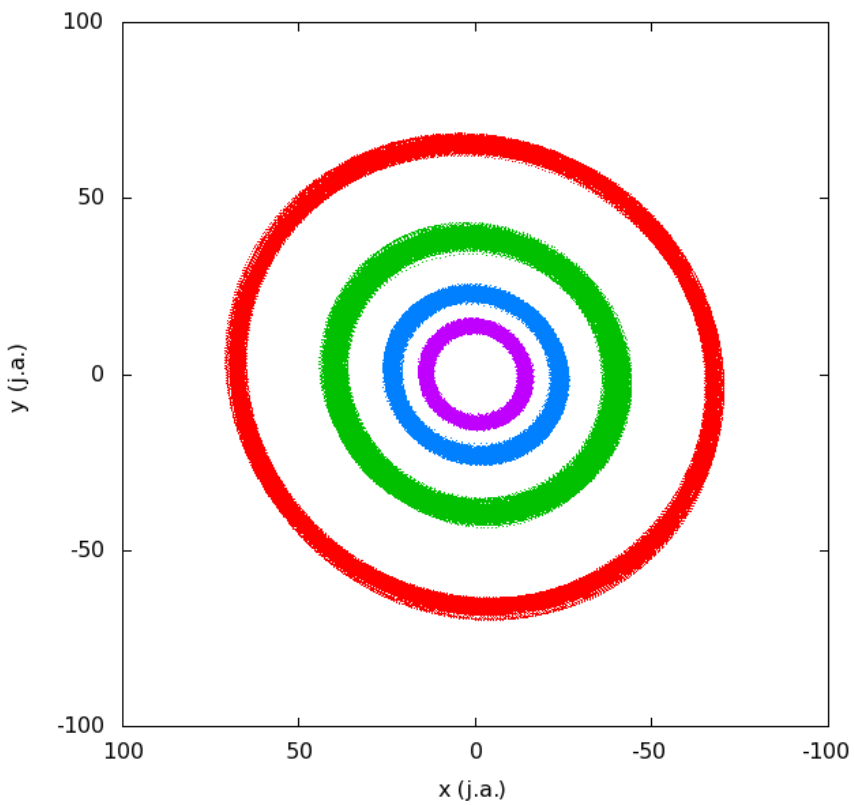
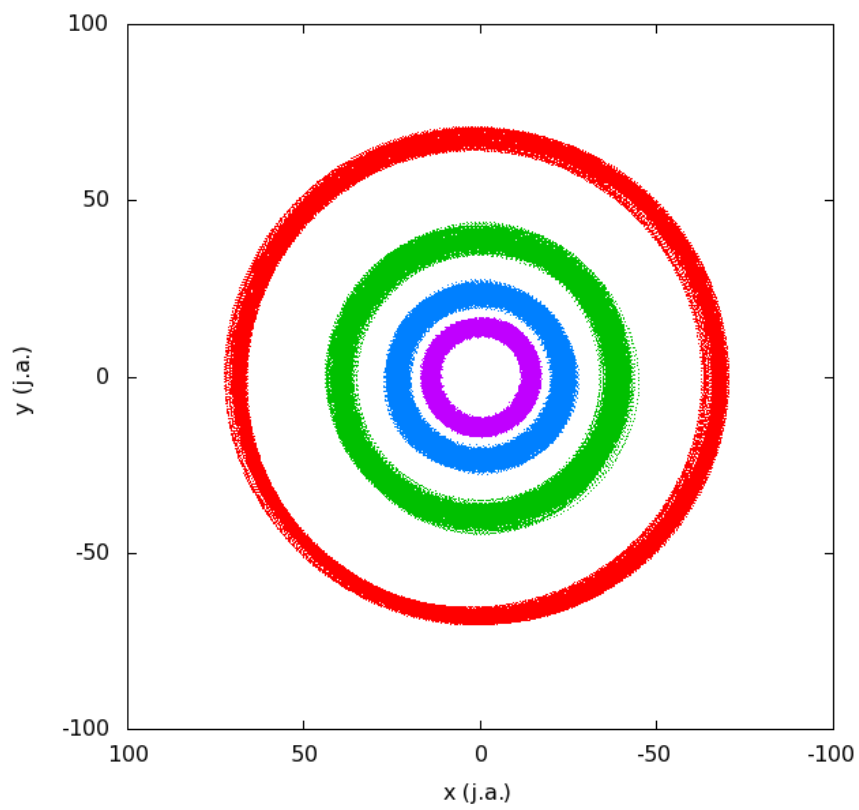
Korzystając z integratora numerycznego Rungego-Kutty 4. rzędu, dokonano symulacji numerycznej powyższych rozwiązań przez okres 100000 lat, z krokiem czasowym  $\Delta t = 1$  dzień. Wyniki ukazały względną stabilność obu rozwiązań na zakładanym przedziale czasowym, zaś bardziej stabilną (szczególnie ze względu na planety d i e) wydaje się być druga z testowanych konfiguracji. Wygenerowane trajektorie planet przedstawia rysunek 5.5.

Należy przy tym zauważyć, że na podstawie otrzymanych wyników nie można jeszcze stwierdzić stabilności badanych konfiguracji, ponieważ w tym celu skala czasowa integracji powinna obejmować przynajmniej 10000 obiegów zewnętrznego składnika (w przybliżeniu 5 mln lat).

Przeprowadzono także symulację dwóch innych konfiguracji. Pierwszą z nich uzyskano, dopasowując do planet układu orbity kołowe o niezależnych od siebie orientacjach. Drugą z alternatywnych konfiguracji uzyskano poprzez ustalenie dla wszystkich planet płaszczyzny orbity dopasowanej względem obserwacji planety d. Obie uzyskane konfiguracje okazały się wysoce niestabilne, co ukazuje rysunek 5.6.

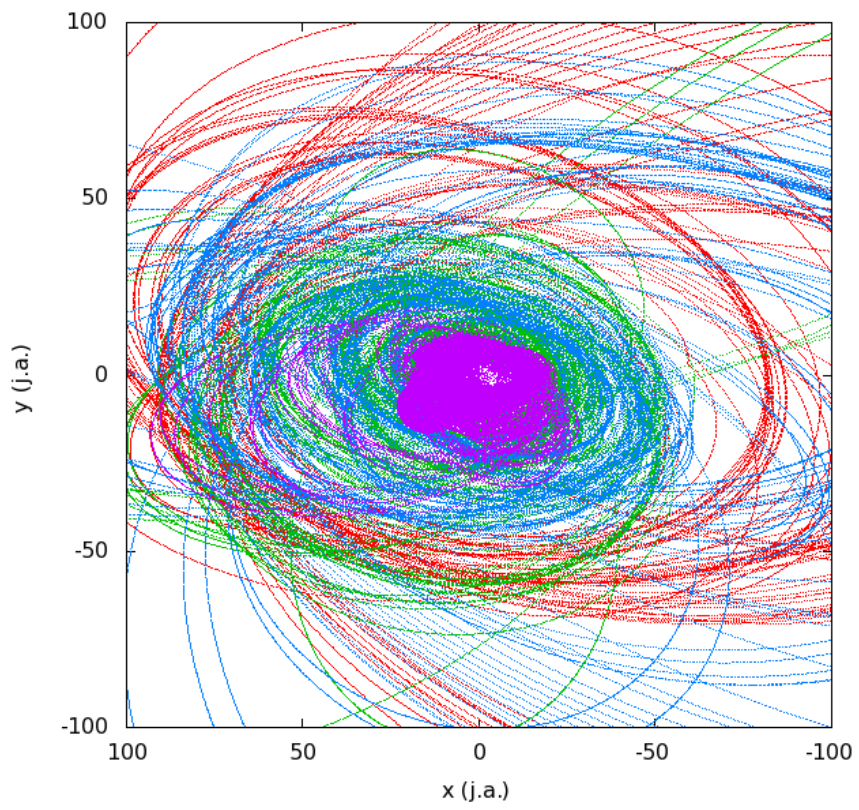
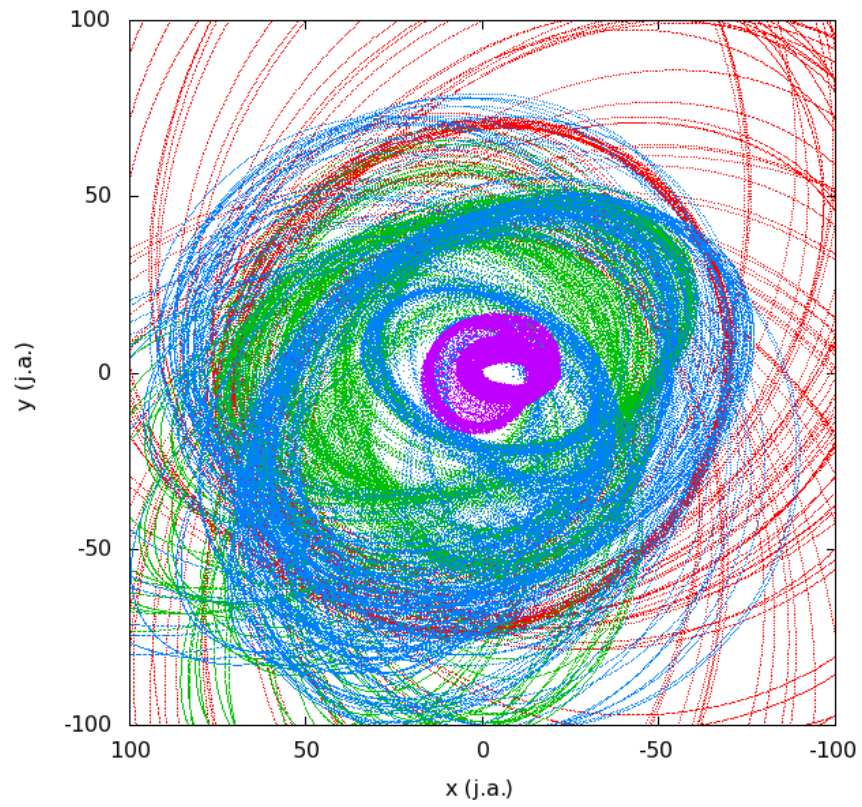


Rysunek 5.4: Konfiguracja orbit kołowych,  $i = 160^\circ$ ,  $\Omega = 32^\circ$  dla układu HR 8799



Rysunek 5.5: Symulacja konfiguracji dla  $i = 180^\circ$  (u góry) oraz dla dopasowanej płaszczyzny orbit  $i = 160^\circ$ ,  $\Omega = 32^\circ$  (u dołu)





Rysunek 5.6: Symulacja alternatywnych konfiguracji dla HR 8799 (opis w tekście)

# Rozdział 6

## Dokumentacja pakietu Planetar

### 6.1 Wprowadzenie

Planetar jest programem komputerowym służącym do modelowania pozasłonecznych układów planetarnych na podstawie obserwacji astrometrycznych i/lub prędkości radialnych. Program pozwala na jednoczesną analizę różnych typów obserwacji oraz elastyczne modelowanie parametrów.

Obecnie (wrzesień 2011) program dostępny jest w repozytorium oprogramowania Centrum Astronomii UMK<sup>1</sup>, skąd pobrać można pełny kod źródłowy projektu.

Program testowany był pod kontrolą systemów operacyjnych Linux oraz Microsoft Windows (przy pomocy środowiska Cygwin).

#### 6.1.1 Wymagania programowe

- GNU Scientific Library (GSL)
- Zestaw bibliotek Boost
- Biblioteka *levmar*

Aby skompilować program przy braku biblioteki *levmar*, należy edytować plik *Makefile*, usuwając `HAVE_LEVMAR` z linii nr 1 oraz `-llevmar` z linii numer 2.

### 6.2 Instalacja

Po pobraniu kodu źródłowego i rozpakowaniu go do wybranego katalogu, należy dokonać kompilacji kodu przy pomocy polecenia `make`. Zostanie utworzony program

---

<sup>1</sup><http://git.astru.umk.pl/>

wykonywalny *Planetar* oraz (w podkatalogu *test*) zestaw programów testowych.

W celu utworzenia dokumentacji kodu źródłowego należy wykonać polecenie `make doc`. W podkatalogu *doc* zostanie utworzona dokumentacja kodu (Doxygen), zarówno w formacie HTML jak i PDF.

## 6.2.1 Korzystanie z efemeryd NASA

W celu precyzyjnego modelowania zjawiska paralaksy, program przystosowany jest do korzystania z plików efemeryd NASA, zawierających modelowane z dużą dokładnością położenia i prędkości planet Układu Słonecznego (w tym Ziemi).

Z uwagi na znaczną objętość, pliki efemeryd nie są udostępniane razem z programem. Można pobrać je bezpośrednio z serwera NASA: `ftp://naif.jpl.nasa.gov/pub/naif/generic_kernels/spk/planets/`

Pobrane pliki efemerydy należy połączyć ze sobą (można do tego celu użyć polecenia `cat`), a wynik zapisać jako plik *nasaeph.asc* w katalogu *eph* programu. Następnie, w tymże katalogu wykonać należy polecenie `make`.

**Przykład** Dla efemerydy DE421 należy pobrać pliki *de421.cmt* i *de421.bsp*. Po zapisaniu ich do katalogu *eph* należy w tym katalogu wykonać polecenia

```
cat de421.cmt de421.bsp > nasaeph.asc  
make
```

po których wykonaniu powinien zostać w katalogu głównym utworzony plik *nasaeph.e*. W celu zaoszczędzenia miejsca na dysku, można wtedy usunąć pobrane pliki efemerydy i plik *nasaeph.asc* z katalogu *eph*.

## 6.2.2 Uruchamianie

Program uruchamia się z linii poleceń, podając jako argumenty nazwy (ścieżki) do plików zadań, które program ma wykonać. Składnia programu jest więc następująca:

```
./Planetar plik1 [ plik2 ... ]
```

Alternatywnie, w celu wyświetlenia informacji o programie można podać parametr `-v` lub `--version`.

## 6.3 Składnia plików zadań

Plik zadań zawiera pełną informację o zadaniu, które ma zostać wykonane przez program. Będzie to w szczególności:

- specyfikacja środowiska uruchamiania
- rodzaj zadania do wykonania
- informacje o analizowanym układzie
- nazwy plików z danymi obserwacyjnymi
- nazwy plików wynikowych.

Warto pamiętać, że po wczytaniu pliku zadań, program traktuje katalog, w którym znajduje się ów plik, jako domyślny. Względne ścieżki do innych plików (np. obserwacji) zapisane w pliku zadań będą rozwijane względem tego właśnie katalogu, nie zaś katalogu, z którego uruchomiony został program.

Pliki zadań mają przejrzysty, tekstowy format INFO, opisany w specyfikacji biblioteki Boost<sup>2</sup>. Każdy plik składa się z **sekcji**, posiadających *klucz*, opcjonalną *wartość* oraz (również opcjonalnie) jedną lub więcej sekcji podrzędnych, zbudowanych według takiej samej składni.

Klucz sekcji jest obowiązkowy i składa się z jednej lub więcej małych liter alfabetu angielskiego i/lub znaków dywizu („-“).

Wartość sekcji jest opcjonalna i w zależności od kontekstu może zawierać:

- tekst, np. *astrocentric* (opcjonalnie ujęty w cudzysłów)
- liczbę, np. *0.49*
- przedział liczbowy, np. *0.1~0.9*
- epokę, wyrażoną jako:
  - epoka Bessela, np. *B1998*
  - epoka juliańska, np. *J2005*
  - dzień juliański, np. *2454550.5*

---

<sup>2</sup>[http://www.boost.org/doc/libs/1\\_47\\_0/doc/html/property\\_tree.html](http://www.boost.org/doc/libs/1_47_0/doc/html/property_tree.html)

---

**Listing 1** Przykładowy plik zadania, generujący syntetyczne obserwacje prędkości radialnych gwiazdy GJ436

---

```
; Modelowanie gwiazdy GJ849

task model
{
  epoch-start J1999
  epoch-end J2007
  obs-count 1000

  star astrometric
  {
    vel-file "gj849.model.vel"

    mass 0.49
    parallax 0.1
    v-off 13.5
    v-acc -4.6

    planet
    {
      mass 0.82
      e 0.06
      P 1884.69
      i 90
      om 351
      Tp 2451462
    }
  }
}
```

---

Pierwsza linia każdej sekcji zawiera klucz oraz (jeżeli istnieje) wartość sekcji, oddzielone co najmniej pojedynczym odstępem. Jeśli sekcja nie zawiera sekcji podrzędnych, jest to pierwsza i ostatnia linia sekcji.

Jeżeli sekcja zawiera sekcje podrzędne, następna linia powinna zawierać wyłącznie nawias klamrowy otwierający („{”). Po tej linii nastąpić powinna (w kolejnych liniach) treść wszystkich sekcji podrzędnych, a następnie linia zawierająca wyłącznie nawias klamrowy zamykający („}”).

Zadanie zawierać może dowolną liczbę pustych linii. Na początku i/lub końcu każdej z linii pliku może znajdować się dowolna liczba spacji i/lub znaków tabulacji. Jeżeli w skład linii wchodzi średnik („;”), część linii znajdująca się na prawo od niego będzie traktowana jako komentarz.

Poniżej przedstawione są różne rodzaje sekcji, które mogą znaleźć się w pliku zadania, wraz z sekcjami podrzędnymi. Sekcje, których wystąpienie jest obowiązkowe oznaczono podkreśleniem.

### 6.3.1 Sekcja główna

Cała treść pliku zadania stanowi zawartość **sekcji głównej**. W sekcji głównej powinna znaleźć się ogólna konfiguracja uruchomienia programu. Obecnie dozwolona jest tylko jedna sekcja wewnątrz sekcji głównej:

DOSTĘPNE SEKCJE		
klucz	ilość	opis
<u>task</u>	1	specyfikacja zadania do wykonania

### 6.3.2 Sekcja *task*

Wartość sekcji *task* charakteryzuje rodzaj zadania do wykonania, zaś zawartość sekcji zależy od rodzaju zadania. W dalszych rozdziałach dokumentacji opisane zostaną poszczególne zadania, wraz ze wskazaniem, jakie informacje muszą się znaleźć w sekcji *task* każdego z nich.

### 6.3.3 Sekcja *star*

Sekcja zawiera informacje o analizowanym układzie planetarnym. W szczególności, tekstowa wartość sekcji wyznacza rodzaj układu odniesienia, w którym definiowane będą elementy orbitalne poszczególnych planet. Dostępne są następujące układy odniesienia:

- *astrocentric* — astrocentryczny układ odniesienia
- *barycentric* — barycentryczny układ odniesienia
- *poincare* — układ odniesienia Poincaré

Podawane w tej sekcji parametry geometryczne dotyczą ruchu barycentrum układu i określone są w epoce podanej jako parametr *epoch*. Jest to istotne, ponieważ przy trójwymiarowym modelowaniu wektorowym ruchu gwiazdy, które jest stosowane przez program, parametry takie jak ruch własny, paralaksa czy przyspieszenie radialne zmieniają się z czasem na skutek przestrzennego ruchu gwiazdy. Efekty te są zauważalne i muszą być brane pod uwagę w astrometrii mikrosekundowej.

Powyższa uwaga dotyczy także podawanych tu wartości rektascensji i deklinacji, które powinny być określone w układzie ICRS.

DOSTĘPNE KLUCZE				
klucz	wartość	domyślnie	jednostka	opis
<u>mass</u>	liczba	1.0	$M_{\odot}$	masa gwiazdy
<u>epoch</u>	epoka	J2000	—	epoka podanych parametrów
ra	liczba	0	stopnie	rektascensja
de	liczba	0	stopnie	deklinacja
parallax	liczba	0	"	paralaksa
x-off	liczba	0	"	położenie barycentrum (x)
y-off	liczba	0	"	położenie barycentrum (y)
x-vel	liczba	0	"/rok	ruch własny barycentrum (x)
y-vel	liczba	0	"/rok	ruch własny barycentrum (y)
x-acc	liczba	0	"/rok/rok	przyspieszenie barycentrum (x)
y-acc	liczba	0	"/rok/rok	przyspieszenie barycentrum (y)
v-off	liczba	0	$\frac{m}{s}$	prędkość radialna barycentrum
v-acc	liczba	0	$\frac{m}{s}/rok$	przyspieszenie radialne barycentrum
pos-file	tekst	—	—	nazwa pliku obserwacji astrometrycznych
vel-file	tekst	—	—	nazwa pliku pomiarów prędkości radialnych

Każda z planet układu powinna zostać opisana w oddzielnej sekcji podrzędnej typu *planet*. Parametryzacja ruchu barycentrum (jeśli jest wymagana) powinna znaleźć się w sekcji *param*.

DOSTĘPNE SEKCJE		
klucz	ilość	opis
planet	dowolna	planeta wchodząca w skład układu
param	1	parametryzacja ruchu barycentrum

### 6.3.4 Sekcja *planet*

Sekcja zawiera informacje o planecie wchodzącej w skład układu.

DOSTĘPNE KLUCZE				
klucz	wartość	domyślnie	jednostka	opis
<u>mass</u>	liczba/przedział	—	$M_J$	masa planety
a	liczba/przedział	—	j.a.	półoś wielka orbity
P	liczba/przedział	—	dni	okres orbitalny
e	liczba/przedział	0	—	mimośród orbity
i	liczba/przedział	0	stopnie	nachylenie orbity
OM	liczba/przedział	0	stopnie	długość węzła wstępującego
om	liczba/przedział	0	stopnie	argument perycentrum
Tp	epoka	—	—	czas przejścia przez perycentrum

Dodatkowo, wymagane jest określenie dokładnie jednego z kluczy a lub P.

### 6.3.5 Sekcja *param*

Sekcje typu *param* służą do definiowania przestrzeni parametrów, służących do wyszukiwania optymalnego rozwiązania dla zadanego układu. Sekcja *param* może znajdować zarówno wewnątrz sekcji *star* (wtedy definiuje parametry określające ruch barycentrum), jak i wewnątrz sekcji *planet* (wtedy definiuje parametryzację planety).

Wartość sekcji *param* jest obowiązkowa i określa typ danej parametryzacji. Elementy sekcji nie zawierają ani wartości, ani sekcji podrzędnych, zaś każdy z nich określa (na podstawie klucza) obecność jednego z możliwych parametrów. Zakresy poszczególnych parametrów będą automatycznie dopasowywane na podstawie informacji podanych w innych sekcjach.

Jeżeli sekcja *param* nie występuje, oznacza to zerowymiarową przestrzeń parametrów zadanego typu.

#### Parametryzacja barycentrum

Parametryzacja barycentrum pozwala na dopasowanie parametrów ruchu barycentrum układu planetarnego względem barycentrum Układu Słonecznego. Zbiór wybranych parametrów powinien być podzbiorem z poniższej listy:



DOSTĘPNE KLUCZE	
klucz	opis
parallax	paralaksa
x-off	położenie barycentrum (x)
y-off	położenie barycentrum (y)
x-vel	ruch własny barycentrum (x)
y-vel	ruch własny barycentrum (y)
x-acc	przyspieszenie barycentrum (x)
y-acc	przyspieszenie barycentrum (y)
v-off	prędkość radialna barycentrum
v-acc	przyspieszenie radialne barycentrum

### Parametryzacja planety

Obecnie, jedyną możliwą parametryzacją ruchu planety jest zestaw elementów orbitalnych (elements). Dozwolone są następujące parametry:

DOSTĘPNE KLUCZE	
klucz	opis
P	okres orbitalny
e	mimośród orbity
i	nachylenie orbity
OM	długość węzła wstępującego
om	argument perycentrum

Dodatkowo, zawsze definiowany jest parametr określający czas przejścia przez perycentrum. W związku z powyższym, zapis

```
param elements
{
}
```

definiować będzie jednowymiarową (nie zaś pustą) przestrzeń parametrów.

### 6.3.6 Sekcja *mini*

Sekcja *mini* służy do specyfikacji algorytmu minimalizacji. Obecnie, dostępne są dwie metody numeryczne, identyfikowane wg wartości sekcji.

- algorytm Nelder-Meada (nm)
- algorytm Levenberga-Marquadta (lm).

Algorytm Nelder-Meada przyjmuje także dwa klucze pochodne: `precision` (domyślnie  $10^{-6}$ ) określający precyzję wyznaczenia minimum, oraz `initial-step` (domyślnie 0.1), określający początkowy krok w przeszukiwaniu przestrzeni parametrów.

### 6.3.7 Sekcja *simulator*

Sekcja `simulator` służy do specyfikacji integratora N-ciał, który ma zostać użyty do modelowania układu planetarnego. Obecnie, jedynym dostępnym integratorem jest metoda Rungego-Kutty 4. rzędu, ze stałym krokiem czasowym określanym parametrem `time-step`.

Jeżeli sekcja `simulator` nie jest obecna, zazwyczaj oznacza to, że układ planetarny będzie modelowany przybliżeniem keplerowskim.

## 6.4 Symulacja układu planetarnego

Symulację układu planetarnego umożliwiają zadania `simulate` oraz `model`.

DOSTĘPNE SEKCJE		
klucz	ilość	opis
<code>star</code>	1	charakterystyka układu planetarnego
<code>simulator</code>	1	specyfikacja integratora N ciał

### 6.4.1 Zadanie *simulate*

Zadanie `simulate` pozwala na trójwymiarową symulację ruchu układu planetarnego. Do wynikowego pliku zostaje wypisana ewolucja układu w formie barycentrycznych wektorów położenia i prędkości wszystkich jego planet.

DOSTĘPNE KLUCZE				
klucz	wartość	domyślnie	jednostka	opis
<code>time-span</code>	liczba	—	dni	długość przedziału czasu symulacji
<code>obs-count</code>	liczba całk.	—	—	liczba żądanych pomiarów
<code>out-file</code>	tekst	—	—	nazwa pliku wynikowego

## 6.4.2 Zadanie *model*

Zadanie *model* podobne jest do zadania *simulate*, jednak w przeciwieństwie do niego, pozwala na modelowanie syntetycznych obserwacji układu.

---

DOSTĘPNE KLUCZE				
klucz	wartość	domyślnie	jednostka	opis
<u>epoch-start</u>	epoka	—	—	początkowa epoka obserwacji
<u>epoch-stop</u>	epoka	—	—	końcowa epoka obserwacji
<u>obs-count</u>	liczba całk.	—	—	ilość żądanych obserwacji
<u>pos-noise</u>	liczba	0	"	szum astrometryczny
<u>vel-noise</u>	liczba	0	$\frac{m}{s}$	szum prędkości radialnych

---

Uwaga! W odróżnieniu od pozostałych zadań, w zadaniu *model* nazwy plików podane wewnątrz sekcji *star* dotyczą plików wynikowych! Istniejące pliki o tych samych nazwach zostaną nadpisane!

## 6.5 Optymalizacja parametrów

Do optymalizacji zadanej konfiguracji pod kątem zgodności z obserwacjami służą zadania *optimise* oraz *minimise*.

---

DOSTĘPNE SEKCJE		
klucz	ilość	opis
<u>star</u>	1	charakterystyka układu planetarnego
<u>simulator</u>	1	specyfikacja integratora N ciał
<u>mini</u>	1	specyfikacja algorytmu minimalizacji

---

### Zadanie *optimise*

Zadanie *optimise* (lub *optimize*) służy do lokalnej optymalizacji podanej konfiguracji początkowej. Po ukończeniu optymalizacji, wypisywana są konfiguracja początkowa i końcowa, wraz z wartościami statystyki  $\chi^2$ ,  $\chi^2_\nu$  oraz błędem średniokwadratowym (rms).

### Zadanie *minimise*

Zadanie *minimise* (lub *minimize*) służy do globalnego przeszukiwania przestrzeni rozwiązań. Z podanych w sekcji *star* dozwolonych przedziałów parametrów losowana

jest konfiguracja początkowa, po czym przeprowadzana jest lokalna optymalizacja. Proces ten powtarzany jest wielokrotnie, a po jego ukończeniu wypisywana jest lista najlepszych otrzymanych konfiguracji.

---

DOSTĘPNE KLUCZE			
klucz	wartość	domyślnie	opis
cutout-chi2	liczba	$+\infty$	max. startowa wartość funkcji celu
repeat	liczba całk.	1	liczba powtórzeń
print	liczba całk.	5	liczba wypisywanych konfiguracji

---

# Rozdział 7

## Podsumowanie

Opracowany w ramach niniejszej pracy model numeryczny może zostać zastosowany, tak jak zostało to już wspomniane, do analizy różnego typu obserwacji układów planetarnych. Implementacja modelu w postaci programu *Planetar* wykonana została według zasad programowania obiektowego w języku C++, dzięki czemu zarządzanie kodem źródłowym jest wygodne, a co ważniejsze, dołączenie do programu nowych elementów (np. integratorów symplektycznych lub modeli z więzami stabilności) może być zrealizowane bez większych trudności.

Analiza precyzyjnych obserwacji astrometrycznych, będąca myślą przewodnią niniejszego projektu, stanowić będzie zarówno test poprawności i bezawaryjności programu, jak również szansę na przybliżenie odkrycia pierwszego układu planetarnego metodą astrometryczną.



# Bibliografia

- Andrae, R., Schulze-Hartung, T., and Melchior, P. (2010). Dos and don'ts of reduced chi-squared. *ArXiv e-prints*.
- Baluev, R. V. (2009). Accounting for velocity jitter in planet search surveys. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 393:969–978.
- Beugé, C., Ferraz-Mello, S., and Michtchenko, T. A. (2007). *Planetary Masses and Orbital Parameters from Radial Velocity Measurements*.
- Bergfors, C., Brandner, W., Janson, M., Köhler, R., and Henning, T. (2011). VLT/NAO astrometry of the HR 8799 planetary system. L'-band observations of the three outer planets. *Astronomy and Astrophysics*, 528:A134+.
- Butler, R. P., Johnson, J. A., Marcy, G. W., Wright, J. T., Vogt, S. S., and Fischer, D. A. (2006). A Long-Period Jupiter-Mass Planet Orbiting the Nearby M Dwarf GJ 849. *The Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 118:1685–1689.
- Fischer, D. A., Marcy, G. W., Butler, R. P., Vogt, S. S., Frink, S., and Apps, K. (2001). Planetary Companions to HD 12661, HD 92788, and HD 38529 and Variations in Keplerian Residuals of Extrasolar Planets. *Astrophysical Journal*, 551:1107–1118.
- Fischer, D. A., Marcy, G. W., Butler, R. P., Vogt, S. S., Henry, G. W., Pourbaix, D., Walp, B., Misch, A. A., and Wright, J. T. (2003). A Planetary Companion to HD 40979 and Additional Planets Orbiting HD 12661 and HD 38529. *Astrophysical Journal*, 586:1394–1408.
- Gooding, R. H. and Odell, A. W. (1988). The hyperbolic Kepler equation (and the elliptic equation revisited). *Celestial Mechanics*, 44:267–282.
- Goździewski, K. (2003). Stability of the HD 12661 Planetary System. *Astronomy and Astrophysics*, 398:1151–1161.

- Goździewski, K. and Migaszewski, C. (2009). Is the HR8799 extrasolar system destined for planetary scattering? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 397:L16–L20.
- Klioner, S. A. (2003). A Practical Relativistic Model for Microarcsecond Astrometry in Space. *Astronomical Journal*, 125:1580–1597.
- Marois, C., Macintosh, B., Barman, T., Zuckerman, B., Song, I., Patience, J., Lafreniere, D., and Doyon, R. (2009). Multiple Planets Orbiting the Star HR 8799. In *American Astronomical Society Meeting Abstracts #214*, volume 2142 of *American Astronomical Society Meeting Abstracts*.
- Marois, C., Zuckerman, B., Konopacky, Q. M., Macintosh, B., and Barman, T. (2010). Images of a fourth planet orbiting HR 8799. *Nature*, 468:1080–1083.
- Nelder, J. A. and Mead, R. (1965). A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, 7(4):308–313.
- Poincare, H. (1897). Sur une forme Nouvelle des Equations du Probleme des Trois Corps. *Bulletin Astronomique, Serie I*, 14:53–67.
- Róžański, P. T. (2009). Astrometryczny model układu planetarnego z dokładnością mikrosekundową. Praca licencjacka.
- Shapiro, I. I. (1964). Fourth Test of General Relativity. *Physical Review Letters*, 13:789–791.
- Shepperd, S. W. (1985). Universal Keplerian state transition matrix. *Celestial Mechanics*, 35:129–144.
- Soummer, R., Brendan Hagan, J., Pueyo, L., Thormann, A., Rajan, A., and Marois, C. (2011). Orbital Motion of HR 8799 b,c, d using Hubble Space Telescope data from 1998: Constraints on Inclination, Eccentricity and Stability. *ArXiv e-prints*.
- Stumpff, P. (1988). The General Kepler Equation and its Solutions. *Celestial Mechanics*, 43:211–+.
- Veras, D. and Ford, E. B. (2009). Secular Evolution of HD 12661: A System Caught at an Unlikely Time. *Astrophysical Journal Letters*, 690:L1–L4.
- Will, C. M. (1971). Theoretical Frameworks for Testing Relativistic Gravity. II. Parametrized Post-Newtonian Hydrodynamics, and the Nordtvedt Effect. *Astrophysical Journal*, 163:611–+.